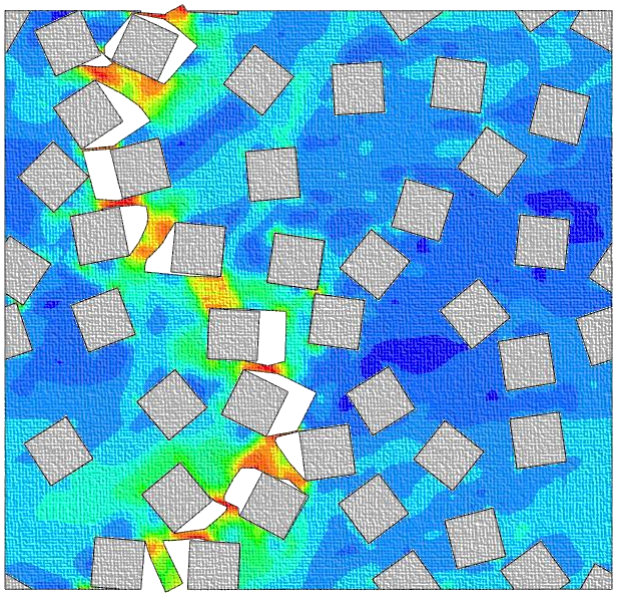
MECÁNICA DE SÓLIDOS

GRADO EN INGENIERÍA MECÁNICA



TENSORES, FORMULARIO COMENTADO Y COLECCIÓN DE PROBLEMAS

Actualizado: 30/10/2017

Jorge Zahr Viñuela
Josué Aranda Ruiz

PREFACIO

El presente texto ha sido confeccionado como material de apoyo a los estudiantes de la asignatura Mecánica de Sólidos, impartida en el Grado en Ingeniería Mecánica de la Universidad Carlos III de Madrid.

Consiste, esencialmente, en una colección de ejercicios relacionados con los distintos apartados que conforman el temario de la asignatura. Para un conjunto seleccionado de ejercicios, se incluye además una pauta de solución en la que, en muchos casos, se ha procurado complementar el procedimiento de resolución con anotaciones o comentarios que vinculan el procedimiento de solución con los correspondientes conceptos teóricos vistos en clases.

Como cabecera de esta colección se ha incluido tres secciones especiales: una breve introducción a tensores incluyendo ciertos aspectos de álgebra y notación, una lista de símbolos y un resumen de las fórmulas más importantes que es necesario emplear en la resolución de los ejercicios. En el formulario se ha procurado complementar las expresiones presentadas mediante una serie de notas teóricas, con el propósito de recordar de manera relativamente sucinta, el origen, alcance y aplicabilidad de dichas expresiones. Cabe mencionar que estas notas en ningún caso sustituyen las exposiciones de teoría que se imparten en las clases de Mecánica de Sólidos, ni tampoco a otros contenidos que pueden encontrarse en libros de texto.

El origen de los ejercicios presentados en esta colección se encuentra en los numerosos ejemplos que se desarrollan en las clases de problemas de "grupo reducido" de la asignatura arriba mencionada, y que se han ido renovando con el paso de los años. En este sentido, los autores agradecen la colaboración de los distintos profesores del Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras que han aportado comentarios y sugerencias útiles, así como ejercicios de su colección personal.

TABLA DE CONTENIDOS

INTRODUCCIÓN A TENSORES, LISTA DE SÍMBOLOS Y FORMULARIO COMENTADO 7

1. INTRODUCCIÓN A TENSORES 7

1.1. Significado intrínseco y componentes en un sistema de referencia 7
1.2. Convención de Einstein para índices repetidos 11
1.3. Operaciones de contracción y productos contraídos 12
1.4. Observaciones sobre las contracciones de los ejemplos E.1 a E.6 15
1.5. Objetividad y Leyes de Transformación 16
1.6. Tensores de 2º y 4º orden relevantes en Mecánica de Sólidos 23

2. LISTA DE SÍMBOLOS 29

3. FORMULARIO COMENTADO 30

3.1. Sobre el tensor de tensiones: invariantes y descomposición aditiva 30
3.2. Sobre el tensor de deformaciones 32
3.3. Algunas variables equivalentes 33
3.4. Elasticidad Lineal e Isótropa 34
3.5. Ecuaciones de Hencky para Elasticidad No-Lineal 35
3.6. Teoría de la Plasticidad en Deformaciones Totales 36
3.7. Teoría Incremental de la Plasticidad 38
3.8. Sobre Líneas de Deslizamiento 40
3.9. Algunas Transformadas de Laplace 41
3.10. Sobre Modelos Viscoelásticos Generalizados e Integrales Hereditarias 42

TEMA 1 – INTRODUCCIÓN 44

PARTE A.- EJERCICIOS DE REPASO DE CONCEPTOS BÁSICOS 44

Ejercicio 1.1 44
Ejercicio 1.2 44
Ejercicio 1.3* 44
Ejercicio 1.4* 44

PARTE B.- PROBLEMAS BÁSICOS SOBRE PLASTICIDAD UNI-DIMENSIONAL 44

Ejercicio 1.5 44
Ejercicio 1.6 44
Ejercicio 1.7 46
Ejercicio 1.8 46
Ejercicio 1.9 47
Ejercicio 1.10* 48
Ejercicio 1.11 49

TEMA 2 – ECUACIONES DE LA MECÁNICA DE SÓLIDOS 52

PROBLEMAS SOBRE CINEMÁTICA DEL SÓLIDO DEFORMABLE 52

Ejercicio 2.1* 52
Ejercicio 2.2 52
Ejercicio 2.3 53
Ejercicio 2.4 53
Ejercicio 2.5 54

TEMA 3 – INTRODUCCIÓN A PLASTICIDAD 56

PARTE A.- EJERCICIOS SOBRE CRITERIOS DE PLASTIFICACIÓN 56

Ejercicio 3.1 56
Ejercicio 3.2 56
Ejercicio 3.3 56
Ejercicio 3.4* 57
Ejercicio 3.5 57
Ejercicio 3.6 58

PARTE B.- EJERCICIOS SOBRE ENDURECIMIENTO POR DEFORMACIÓN PLÁSTICA 59

Ejercicio 3.7* 59
Ejercicio 3.8 59
Ejercicio 3.9* 60
Ejercicio 3.10 60

PARTE C.- EJERCICIOS SOBRE TEORÍA INCREMENTAL Y TEORÍA TOTAL DE LA PLASTICIDAD 61

Ejercicio 3.11 61
Ejercicio 3.12* 61
Ejercicio 3.13 62
Ejercicio 3.14 62
Ejercicio 3.15* 62
Ejercicio 3.16 63
Ejercicio 3.17 63
Ejercicio 3.18 64
Ejercicio 3.19* 65
Ejercicio 3.20* 66

PARTE D.- EJERCICIOS SOBRE PLASTICIDAD 2D (LÍNEAS DE DESLIZAMIENTO) 68

Ejercicio 3.21 68
Ejercicio 3.22 68
Ejercicio 3.23 68
Ejercicio 3.24 70
Ejercicio 3.25 71

TEMA 4 – INTRODUCCIÓN A VISCOELASTICIDAD 72

PARTE A.- PROBLEMAS SOBRE MODELOS GENERALIZADOS EN VISCOELASTICIDAD 72

Ejercicio 4.1 72
Ejercicio 4.2 72
Ejercicio 4.3* 73

PARTE B.- PROBLEMAS SOBRE PPIO. DE CORRESPONDENCIA E INTEGRALES HEREDITARIAS 73

Ejercicio 4.4 73
Ejercicio 4.5 74
Ejercicio 4.6* 74
Ejercicio 4.7 75
Ejercicio 4.8 76
Ejercicio 4.9 76
Ejercicio 4.10 77

TEMA 5 – INTRODUCCIÓN A VISCOPLASTICIDAD 78

PARTE A.- PROBLEMAS SOBRE LEYES DE FLUENCIA ESTACIONARIA 78

Ejercicio 5.1 78
Ejercicio 5.2 78
Ejercicio 5.3 79

SOLUCIONES DE ALGUNOS DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS **80**

TEMA 1 – EJERCICIOS DE REPASO DE CONCEPTOS BÁSICOS **80**

Ejercicio 1.3 80

TEMA 1 – PROBLEMAS BÁSICOS SOBRE PLASTICIDAD 1-D **81**

Ejercicio 1.4 81
Ejercicio 1.10 81

TEMA 2 – ECUACIONES DE LA MECÁNICA DE SÓLIDOS **84**

Ejercicio 2.1 84

TEMA 3 – INTRODUCCIÓN A PLASTICIDAD **85**

Ejercicio 3.4 85
Ejercicio 3.7 87
Ejercicio 3.9 92
Ejercicio 3.12 93
Ejercicio 3.15 98
Ejercicio 3.19 100
Ejercicio 3.20 108

TEMA 4 – INTRODUCCIÓN A VISCOELASTICIDAD **111**

Ejercicio 4.3 111
Ejercicio 4.6 117

INTRODUCCIÓN A TENSORES, LISTA DE SÍMBOLOS Y FORMULARIO COMENTADO

1. Introducción a Tensores

En asignaturas anteriores a Mecánica de Sólidos, tales como Teoría de Elasticidad o Resistencia de Materiales, se ha tratado con dos cantidades físicas de naturaleza tensorial de gran importancia: el tensor de tensiones y el tensor de deformaciones. Sobre ellos, se ha explicado que son tensores simétricos y de segundo orden, cuáles son sus características principales y el porqué de su importancia en Mecánica de Sólidos. En la mayoría de los casos se los presenta en su acepción de matriz simétrica de tamaño 3x3.

Este enfoque, aunque ciertamente útil de cara a la resolución de problemas de interés ingenieril y poseedor de innegables méritos pedagógicos, suele omitir, sin embargo, la cuestión fundamental de explicar *qué es un tensor* y porqué los tensores son importantes a la hora de formular las *ecuaciones de gobierno* de los fenómenos físicos tratados en Mecánica de Sólidos.

Las notas que a continuación se presentan no pretenden ser un tratado exhaustivo sobre análisis tensorial ni sobre Álgebra Lineal. Únicamente pretenden proponer una explicación lo más simplificada posible a las dos cuestiones antes mencionadas, haciendo hincapié en los aspectos conceptuales por sobre la operatoria específica.

Esencialmente, se expondrá tres nociones sobre lo que es un tensor, nociones que son complementarias entre sí y que permitirán ilustrar el denominado *Principio de Objetividad* que debe siempre tenerse en cuenta a la hora de formular ecuaciones de gobierno.

Nota: en el tratamiento expuesto, todos los sistemas de coordenadas considerados son *ortogonales*, de modo que no es necesario distinguir entre componentes *covariantes* y *contravariantes*. Todos los tensores tratados pueden entenderse, por tanto, como *tensores cartesianos*.

1.1. Significado intrínseco y componentes en un sistema de referencia

Entre las variables de interés que participan en Mecánica de Sólidos, puede identificarse tres tipos de cantidades físicas: cantidades escalares, cantidades vectoriales y cantidades tensoriales.

Cantidades escalares: en forma intuitiva, puede pensarse que una cantidad física tiene naturaleza *escalar* si ella queda completamente caracterizada por un único valor numérico en el espacio tridimensional, el cual es independiente de la *orientación* del sistema de coordenadas en el cual dicha cantidad sea medida. Ejemplos de tales cantidades son la temperatura, la energía, la densidad, etc.

Cantidades vectoriales: del mismo modo, puede pensarse que una cantidad física tiene naturaleza *vectorial* si ella queda completamente caracterizada por tres valores numéricos en el espacio tridimensional. Estos tres valores numéricos se denominan *componentes* y, a diferencia de lo que ocurría con las cantidades escalares, éstas sí dependen de la *orientación* del sistema de coordenadas. Ejemplos de cantidades vectoriales son la fuerza, la velocidad, la posición, etc.

También en forma intuitiva, puede pensarse que los vectores son, en general, entes que "generalizan" el concepto de escalar en el sentido de que, mientras un escalar queda completamente determinado en el espacio tridimensional por una única componente de valor real, un vector queda completamente determinado por tres valores escalares, lo cual permite a este tipo de variables describir efectos de direccionalidad (orientación).

Cantidades tensoriales: un modo intuitivo de entender las cantidades de naturaleza *tensorial* es considerarlas como cantidades físicas que requieren de un cierto número de componentes escalares (número eventualmente mayor que 3) para quedar completamente determinados en un sistema de referencia. Ejemplos relevantes en Mecánica de Sólidos son el tensor de tensiones y el de deformaciones, los cuales quedan completamente determinados en el espacio tridimensional por nueve componentes escalares que están asociadas a la orientación de un determinado sistema de ejes coordenados. Otros tipos de tensores pueden tener un número de componentes mayor a nueve, lo que da origen a la noción de "orden" de un tensor. Un tensor de orden 2 posee $3^2=9$ componentes mientras que un tensor de orden n posee 3^n componentes escalares en el espacio tridimensional, componentes que, al igual que en el caso de los vectores, están asociadas a la orientación de un determinado sistema de ejes coordenados.

PRIMERA noción intuitiva del concepto de tensor:

Los tensores son entidades que "generalizan" a los escalares y a los vectores en el sentido de que los escalares pueden entenderse como tensores de orden n=0 puesto que ellos quedan completamente determinados por una única componente, los vectores pueden entenderse como tensores de orden n=1 puesto que ellos quedan completamente determinados por 3 componentes escalares, existiendo también otros "*tensores de orden n*" que quedan completamente determinados por 3^n componentes escalares.

La única diferencia entre los tensores de orden $n = 0$ y aquellos de orden $n \geq 1$ es que la única componente que define a los primeros es independiente de la orientación del sistema de coordenadas, mientras que para los segundos, el valor de sus componentes está *asociado a la orientación* de un determinado sistema de ejes coordenados.

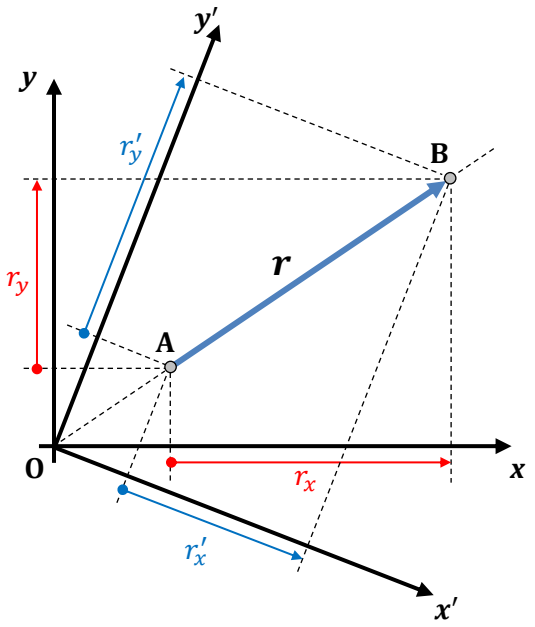
En Mecánica de Sólidos, además de los mencionados tensores de tensiones y deformaciones (que son tensores 2º orden), son relevantes ciertos tensores de 4º orden como por ejemplo el tensor de rigidez elástica, el tensor de flexibilidad elástica o el tensor identidad, entre otros.

1.1.1. Notas sobre vectores: significado intrínseco, componentes y notación.

Al tratar con cantidades vectoriales es posible distinguir al *objeto* o *cantidad vectorial* en cuestión, cuyo significado intrínseco es independiente de cualquier sistema de referencia, de las *componentes* que dicha cantidad vectorial posee en un determinado sistema de coordenadas.

Por ejemplo, si consideramos dos puntos distintos A y B del espacio, puede pensarse en el vector *posición relativa* $\boldsymbol{r}$ de B con respecto de A. Puede considerarse que el *significado intrínseco* del vector $\boldsymbol{r}$ es el de ser un "*segmento rectilíneo orientado desde A hacia B*". Como tal, esta definición de $\boldsymbol{r}$ no hace referencia a ningún sistema de coordenadas y, en la práctica, debe observarse que ella contiene a los tres elementos que identifican la noción generalmente aceptada de lo que es un vector en Física: un vector es algo que posee *magnitud* (en este caso, la distancia entre A y B), *dirección* (es un subconjunto de la línea recta que une A y B) y *sentido* (orientado desde A hacia B).

Por otra parte, si se considera un determinado sistema de referencia Oxyz y si se considera como *componentes* de $\boldsymbol{r}$ a los números reales r_x, r_y y r_z , cuyo valor absoluto define el tamaño de las *proyecciones orientadas* de $\boldsymbol{r}$ sobre los tres ejes cartesianos *x*, *y* y *z* y cuyo signo define el sentido de dichas proyecciones orientadas, resulta evidente que los valores de dichas componentes dependen de la *orientación* del sistema Oxyz. Más aún, si se consideran dos sistemas de coordenadas, Oxyz y (Oxyz)', los cuales comparten el origen pero están rotados el uno con respecto al otro, las componentes de $\boldsymbol{r}$ son diferentes en cada uno de ellos. Lo anterior se representa en la Figura 1.



Matriz de componentes de $\boldsymbol{r}$ en O_{xyz} :

$$r = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de componentes de $\boldsymbol{r}$ en $(O_{xyz})'$:

$$r' = \begin{bmatrix} r'_x \\ r'_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Magnitud de $\boldsymbol{r}$:

$$\|\boldsymbol{r}\| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = \sqrt{(r'_x)^2 + (r'_y)^2}$$

$$= \sqrt{r^T r} \qquad = \sqrt{(r')^T r'}$$

Figura 1: el símbolo $\boldsymbol{r}$ (resaltado en negritas) alude al "segmento orientado desde A hacia B"; los símbolos r_x, r_y y r_z aluden a las componentes de $\boldsymbol{r}$ en O_{xyz}; los símbolos r'_x, r'_y y r'_z aluden a las componentes de $\boldsymbol{r}$ en $(O_{xyz})'$.

Los símbolos r y r' (sin resaltar) aluden a las matrices de componentes de $\boldsymbol{r}$ en los dos sistemas de referencia considerados.

Es frecuente que, una vez escogido un determinado sistema de coordenadas, se utilice una *notación de índices* para identificar a las componentes de $\boldsymbol{r}$ en dicho sistema, por ejemplo r_i con $i \in \{x,y,z\}$. Alternativamente y por motivos que se explicará más adelante, resulta mucho más conveniente identificar a las componentes de $\boldsymbol{r}$ mediante r_i donde i representa un índice numérico que toma sus valores del conjunto $i \in \{1,2,3\}$. Estos valores han de interpretarse como los *ejes* 1, 2 o 3, de un determinado sistema de coordenadas cartesianas (ejes ortogonales).

Con esta notación, puede interpretarse a r_i con $i \in \{1,2,3\}$ como la "componente i-ésima" de una matriz columna de tamaño 3x1. Un vector, por tanto, requiere de un *único* índice para identificar a sus 3 componentes, las cuales pueden ser "almacenadas" en una matriz columna. Las consideraciones anteriores dan origen a tres tipos de notación que es posible utilizar al tratar con cantidades físicas de tipo vectorial:

(*a*) **Notación vectorial libre de índices**: el símbolo $\boldsymbol{r}$ (resaltado en negritas) hace referencia al significado intrínseco del vector, con independencia de cualquier sistema de referencia.

(*b*) **Notación vectorial indexada**: el símbolo r_i con $i \in \{1,2,3\}$ hace referencia a las tres componentes del vector en un sistema de coordenadas determinado.

(*c*) **Notación matricial en componentes**: se asocia el símbolo r (no resaltado en negritas) a la matriz columna que almacena las componentes del vector en un sistema de coordenadas determinado, por ejemplo:

$$r = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

Debe mencionarse además que, puesto que las componentes de $\boldsymbol{r}$ en una referencia se interpretan como *proyecciones orientadas* del vector sobre los tres ejes coordenados de dicha referencia, deben existir leyes de transformación claras que permiten obtener las componentes del vector en

un sistema (Oxyz)' a partir de sus componentes conocidas en otro sistema Oxyz y de la orientación relativa conocida entre ambos sistemas (esta orientación es caracterizada por los nueve ángulos entre los ejes de ambos sistemas). Estas leyes de transformación se describirán más adelante, en el apartado 1.5.

Invariantes de un vector: Aunque es evidente que al rotar un sistema de coordenadas, las componentes de un vector cambian en función de los ángulos de rotación, hay algo que no cambia y esto es la *magnitud* del vector, que es una noción que, como se ha dicho, forma parte del significado intrínseco de la cantidad vectorial $\boldsymbol{r}$. Esto se representa también en la Figura 1. Se dice entonces que la magnitud de un vector es un *invariante* de $\boldsymbol{r}$ frente a rotación del sistema de coordenadas y, más aun, se constata que dicho invariante posee una interpretación geométrica de distancia.

Resumen sobre vectores:

- Un vector posee un significado intrínseco, que es independiente del sistema de coordenadas que se utilice para evaluar sus componentes.
- La evaluación de las componentes de un vector, a diferencia de su significado intrínseco, requiere fijar un determinado sistema de coordenadas cartesianas.
- Un vector tiene **tres** componentes en el espacio tridimensional, que son entendidas como "proyecciones orientadas" del vector sobre unos ejes coordenados determinados. Estas componentes pueden ser almacenadas en una matriz de tamaño 3x1 y se requiere, por tanto, un **único índice** para identificar a la componente r_i de $\boldsymbol{r}$ en dicha matriz.
- Existen leyes bien definidas que describen cómo se transforman las componentes de un vector frente a una rotación del sistema de coordenadas.
- Aunque las componentes de un vector cambian cuando se rota el sistema de coordenadas, existe una cantidad – su magnitud – que se mantiene invariante.

1.1.2. Notas sobre tensores: significado intrínseco, componentes y notación.

Al igual que ocurre con los vectores, al tratar con cantidades tensoriales es necesario distinguir, en términos de notación, al *objeto o cantidad tensorial* en cuestión, cuyo significado intrínseco es independiente de cualquier sistema de referencia, de las *componentes* que dicha cantidad tensorial posee en un determinado sistema de coordenadas.

En el caso del tensor de tensiones, por ejemplo, esta distinción se realiza asignando el símbolo $\boldsymbol{\sigma}$ al objeto tensorial "tensor de tensiones" e incluyendo en él a su significado intrínseco, a la vez que asignando el símbolo σ_{ij} a las componentes de $\boldsymbol{\sigma}$ en un determinado sistema de coordenadas. En este último caso, los índices i, j que identifican las componentes toman sus valores del conjunto {1,2,3}. En ciertas circunstancias, puede utilizarse para los índices i, j símbolos provenientes del conjunto {*x*,*y*,*z*}, en referencia a la *notación clásica* utilizada para los ejes *x*, *y* y *z* de un sistema de ejes cartesianos. Aunque útil en términos didácticos, este tipo de notación es menos conveniente que una notación que utiliza índices numéricos pues no permite aplicar, por ejemplo, la convención de Einstein de índices repetidos para realizar operaciones de contracción o cálculo de trazas, entre otras (esto se describirá más adelante, en el apartado 1.2).

Dado que un tensor de segundo orden requiere dos índices para identificar sus componentes en un sistema de coordenadas, es frecuente almacenar las nueve componentes σ_{ij} de $\boldsymbol{\sigma}$ en una matriz cuadrada de tamaño 3x3, en la que (i, j) denota (nº de *fila*, nº de *columna*) dentro de dicha matriz.

Al igual que ocurría con los vectores, las consideraciones anteriores permiten establecer tres tipos de notación para cantidades físicas que tienen naturaleza de tensores de 2º orden:

(*a*) **Notación tensorial libre de índices**: el símbolo $\boldsymbol{\sigma}$ (en negritas) hace referencia al significado intrínseco del tensor, con independencia de cualquier sistema de referencia.

(*b*) **Notación tensorial indexada**: el símbolo σ_{ij} con $i, j \in \{1,2,3\}$ hace referencia a las nueve componentes de $\boldsymbol{\sigma}$ en un sistema de coordenadas determinado.

(*c*) **Notación matricial en componentes**: se asocia el símbolo σ (sin negritas) a la matriz de 3x3 que almacena las componentes de $\boldsymbol{\sigma}$ en un sistema de coordenadas determinado, por ejemplo:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad \text{o, eventualmente,} \quad \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

En ciertos ejercicios de esta colección, así como en el subconjunto de soluciones presentadas se utilizará indistintamente, según conveniencia, cualquiera de los tres tipos de notación arriba mencionadas para vectores o para tensores de segundo orden.

Notación para tensores de orden n: Extrapolando las nociones anteriores, un tensor de orden n requiere de n índices para identificar sus componentes en un determinado sistema de coordenadas. Por ejemplo, si $\boldsymbol{D}$ es un tensor de 4º orden, éste tiene $3^4 = 81$ componentes que pueden ser representadas mediante el símbolo D_{ijkl} con $i, j, k, l \in \{1,2,3\}$. Debe observarse entonces que en el caso de tensores de orden $n > 2$ se hace relativamente difícil o poco práctico el uso de una notación matricial en términos de matrices cuadradas. En el ejemplo anterior, podría pensarse en almacenar las componentes de $\boldsymbol{D}$ en una "hipermatriz" de tamaño 3x3 en cuyas filas y columnas identificadas por (k, l) se almacenan otras submatrices, también de tamaño 3x3, cuyas filas y columnas se identifican mediante (i, j). Por este motivo, al tratar con tensores de orden superior suele recurrirse a las notaciones (a) o (b), según conveniencia, evitando la notación matricial (c).

Una excepción la constituye la denominada **notación matricial** de **Voigt**, que es un tipo de notación matricial que puede aplicarse a ciertos tensores de 2º y de 4º orden y que es de frecuente aplicación en Teoría de Elasticidad. Esta notación particular no será tratada en este compendio.

Invariantes de un tensor: La discusión presentada más arriba sobre el concepto de *invariante de un vector* puede extrapolarse al caso de los tensores de orden superior: éstos, además de poseer unas componentes que cambian en función de la orientación del sistema de coordenadas, poseen también un cierto número de cantidades numéricas que se mantienen *invariantes* y a las que puede atribuirse, al igual que a la magnitud de un vector, una cierta interpretación geométrica. Los tensores simétricos y de 2º orden de tensiones y deformaciones, por ejemplo, poseen tres cantidades invariantes a los cuales puede atribuirse una interpretación geométrica que puede describirse claramente recurriendo al espacio de Haig-Westergaard (o espacio de las tensiones o deformaciones principales).

1.2. Convención de Einstein para índices repetidos

Si en un monomio aparece un índice repetido dos veces, se entenderá, entonces, que ha de realizarse una sumatoria sobre el índice repetido, sin necesidad de escribir explícitamente el símbolo de sumatoria. En cambio, no se entenderá sumatoria si en un monomio un índice aparece repetido tres veces. Por ejemplo:

- $x = a_{ii}$ se entenderá como $x = \sum_{i=1}^{3} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$

- $x_i = a_{ij} b_j$ se entenderá como $x_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} b_j = a_{i1} b_1 + a_{i2} b_2 + a_{i3} b_3$

- $a_{ij} b_j c_j$ **no** se entenderá como sumatoria. Esta expresión no está definida.

En los dos primeros ejemplos, el índice repetido se denomina ***índice mudo***. Así mismo, se denomina ***índice libre*** a cualquier índice que ***no*** aparezca repetido y que, por tanto, no implique una sumatoria. En el caso de los dos primeros ejemplos anteriores, la noción de índice mudo y de índice libre se resume en lo siguiente:

- $x = a_{ii} = a_{rr}$ puesto que $x = \sum_{i=1}^{3} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \sum_{r=1}^{3} a_{rr}$

  Donde i y r son índices mudos.

- $x_i = a_{ij} b_j = a_{ip} b_p$ puesto que $x_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} b_j = a_{i1} b_1 + a_{i2} b_2 + a_{i3} b_3 = \sum_{p=1}^{3} a_{ip} b_p$

  Donde i es un índice libre mientras que j y p son índices mudos.

1.3. Operaciones de contracción y productos contraídos

La operación de sumatoria que ha de implicarse de la notación de Einstein a veces se denomina **operación de contracción**, puesto que el resultado de la sumatoria contiene un número menor de índices que las variables originales que contenían los índices repetidos.

1.3.1. La operación "traza"

La operación de contracción más sencilla es la que se encuentra en el primero de los ejemplos anteriores y se denomina ***traza***. Si $\boldsymbol{a}$ es un tensor de segundo orden y a_{ij} son sus componentes en cierto sistema de coordenadas, la traza de $\boldsymbol{a}$ es una operación que asocia a $\boldsymbol{a}$ el escalar $\alpha = tr(\boldsymbol{a})$, del siguiente modo:

$$\alpha = tr(\boldsymbol{a}) = a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

Si las componentes a_{ij} se organizan dentro de una matriz de componentes, puede entenderse a $tr(\ \ )$ como a una operación lineal que asigna a dicha matriz la suma de los elementos de su diagonal.

Es posible formar operaciones de contracción más complejas que la traza, y que involucran a más de un argumento. Estas operaciones de contracción permiten definir unos tipos particulares de "productos" que pueden realizarse entre tensores, entre vectores, o en forma mixta entre tensores y vectores. Los resultados de los diferentes tipos de ***productos contraídos*** pueden ser, según el caso, escalares, vectores o tensores. La denominación de "contracción", o de "producto contraído", proviene del hecho de que el número de índices que identifican a las componentes del resultado es menor o igual que el número total de índices de los factores que participan en el producto contraído.

1.3.2. Ejemplos de contracciones en las que se utiliza la convención de Einstein:

En los siguientes ejemplos (E.1) a (E.6) se utilizará, donde sea posible, los tres tipos de notación antes descritos para tensores. Se omitirá la notación matricial en componentes cuando ella no sea aplicable por el orden de las cantidades involucradas en las contracciones.

Sea α un escalare arbitrario $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sean $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ dos vectores de componentes a_i y b_i en determinado sistema de referencia.

Sean $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ y $\boldsymbol{h}$ tensores de segundo orden, de componentes σ_{ij} , ε_{ij} y h_{ij}.

Sean $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}$ dos tensores de cuarto orden, de componentes D_{ijkl} y E_{ijkl}.

E.1. Producto escalar (o producto *punto*) entre dos vectores:

Notación tensorial libre de índices: $\alpha = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

Notación tensorial indexada: $\alpha = a_i b_i$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

Notación matricial: $\alpha = a^T b = b^T a = a_i b_i$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

Nota: obsérvese que como el resultado es un número real, no se requiere índices para la identificación de sus componentes. Por tanto, esta operación de contracción ha reducido el número de índices desde dos (uno por cada uno de los factores) hasta cero. La razón es que, debido a la convención de Einstein, el índice repetido *desaparece* al expandir la sumatoria.

E.2. Producto contraído entre un tensor y un vector, que resulta en otro vector:

Notación tensorial libre de índices: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{b}$

Notación tensorial indexada: $a_i = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{b})_i = \sigma_{ij} b_j = \sigma_{ip} b_p$ (pues el índice repetido es mudo)

Notación matricial: $a = \sigma b$

Notas: + obsérvese que como el resultado es un vector, se requiere un solo índice para la identificación de sus componentes. Por tanto, esta operación de contracción ha reducido el número de índices desde los tres que aportaban los factores hasta uno.

+ Por otra parte, debe tenerse presente, en el caso de la *notación matricial*, que el producto entre matrices no es conmutativo. Sin embargo, si se emplea la notación indexada, no hay diferencias entre $\sigma_{ij} b_j$ y $b_j \sigma_{ij}$. En efecto:

$$a_i = \sigma_{ij} b_j = \sigma_{i1} b_1 + \sigma_{i2} b_2 + \sigma_{i3} b_3 = b_1 \sigma_{i1} + b_2 \sigma_{i2} + b_3 \sigma_{i3} = b_j \sigma_{ij}$$

$\therefore$ En notación indexada, una contracción simple sí es conmutativa.

E.3. Producto contraído entre dos tensores, que resulta en otro tensor:

Notación tensorial libre de índices: $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$

Notación tensorial indexada: $h_{ij} = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})_{ij} = \sigma_{ip} \varepsilon_{pj} = \sigma_{iq} \varepsilon_{qj}$ (pues el índice repetido es mudo)

Notación matricial: $h = \sigma \varepsilon$

Notas: + este producto también se conoce como "*contracción simple*" entre dos tensores de segundo orden, que resulta en un nuevo tensor de segundo orden. Aquí, los cuatro índices que aportaban los dos factores se reducen a dos índices en el resultado.

+ Al igual que en (E.2), debe tenerse presente en el caso de la notación matricial que el producto entre matrices no es conmutativo. De hecho, si σ y ε son matrices simétricas, entonces $\varepsilon\sigma = h^T \neq h = \sigma\varepsilon$

+ En cambio, si se emplea la notación indexada, se tiene que $\sigma_{ip}\varepsilon_{pj} = \varepsilon_{pj}\sigma_{ip}$. En efecto:

$$h_{ij} = \sigma_{ip}\varepsilon_{pj} = \sigma_{i1}\varepsilon_{1j} + \sigma_{i2}\varepsilon_{2j} + \sigma_{i3}\varepsilon_{3j} = \varepsilon_{1j}\sigma_{i1} + \varepsilon_{2j}\sigma_{i2} + \varepsilon_{3j}\sigma_{i3} = \varepsilon_{pj}\sigma_{ip}$$

$\therefore$ En notación indexada, una contracción simple entre tensores sí es conmutativa.

E.4. Producto escalar (o interior) entre dos tensores, que resulta en un escalar real:

Notación tensorial libre de índices: $\alpha = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

Notación tensorial indexada: $\alpha = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \sigma_{pq}\varepsilon_{pq}$ (pues los índices repetidos son mudos)

Notación matricial: $\alpha = tr(\sigma^T\varepsilon) = tr(\sigma\varepsilon^T)$

Notas: + Este producto también se conoce como "*contracción doble*" entre dos tensores de segundo orden, que resulta en un escalar real.

+ Esta doble contracción involucra una suma de nueve términos que pueden, a su vez, factorizarse en seis cuando los factores $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\varepsilon}$ son tensores simétricos:

$$\alpha = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{33}\varepsilon_{33} + 2(\sigma_{12}\varepsilon_{12} + \sigma_{13}\varepsilon_{13} + \sigma_{23}\varepsilon_{23})$$

E.5. Doble contracción entre un tensor de 4º orden y uno de 2º orden, que resulta en otro tensor de 2º orden:

Notación tensorial libre de índices: $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D} : \boldsymbol{\varepsilon}$

Notación tensorial indexada: $\sigma_{ij} = (\boldsymbol{D} : \boldsymbol{\varepsilon})_{ij} = D_{ijkl}\varepsilon_{kl}$

Notación matricial: N/A

Nota: Esta *doble contracción* produce un resultado con dos índices a partir de dos factores que incluían un total de seis índices. Es decir, la doble contracción ha reducido en cuatro el número de índices en el resultado a partir del número de índices en los factores.

E.6. Producto escalar (o interior) entre dos tensores de 4º orden:

Notación tensorial libre de índices: $\alpha = \boldsymbol{D} :: \boldsymbol{E}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

Notación tensorial indexada: $\alpha = D_{ijkl}E_{ijkl}$

Notación matricial: N/A

Nota: Esta *contracción cuádruple* produce un resultado escalar (esto es, sin índices) a partir de dos factores que incluían un total de ocho índices.

1.4. Observaciones sobre las contracciones de los ejemplos E.1 a E.6

El concepto de contracción: en general, cada operación de contracción simple reduce en dos el número total de índices que tenían inicialmente los factores participantes en el producto contraído, algo que se deduce directamente de la convención de índices de Einstein.

Contracciones múltiples: si se considera la existencia de *tensores de orden superior* (que requieren más de dos índices para identificar sus componentes), puede también considerarse operaciones de contracción múltiple formadas por varias contracciones simples, en las que cada contracción simple reduce en dos el número de índices en el resultado.

Si se observa el ejemplo (E.1), en el cual $\alpha = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$, puede entenderse al vector $\boldsymbol{a}$ como a una entidad que es capaz de *transformar* al vector $\boldsymbol{b}$ (que es un tensor de orden 1) en un escalar α (que es un tensor de orden 0), pudiendo demostrarse que dicha transformación basada en una contracción simple es de tipo *lineal* (se deja esta demostración como tarea al lector). Además, el orden del tensor imagen se obtiene del orden de los tensores de partida $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ y del número de índices eliminados por la operación de contracción (que en este caso es 2, dado que se trata de una contracción simple). En otras palabras, si al orden del tensor imagen α se suma el número de índices eliminados por la contracción simple y se resta el orden del tensor de partida $\boldsymbol{b}$ se obtiene 0+2-1 = 1, lo que ayuda a caracterizar al *tensor transformador* $\boldsymbol{a}$ como a un tensor de orden 1.

Se dice, entonces, que es posible interpretar a cualquier vector $\boldsymbol{a}$ como a un tensor de orden 1, puesto que $\boldsymbol{a}$ define una *transformación lineal* de vectores en escalares.

Análogamente, si se observa el ejemplo (E.2) en el cual $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{b}$, puede entenderse a $\boldsymbol{\sigma}$ como a una entidad que es capaz de transformar al vector $\boldsymbol{b}$ en el vector $\boldsymbol{a}$ mediante una operación de contracción simple (siendo $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ tensores de orden 1). Puede demostrarse también aquí que dicha transformación es de tipo lineal (dejándose esta tarea al lector). Además, si al orden del tensor imagen $\boldsymbol{a}$ se suma el número de índices eliminados por la contracción simple y se resta el orden del tensor de partida $\boldsymbol{b}$ se obtiene 1+2-1 = 2, lo que ayuda a caracterizar al *tensor transformador* $\boldsymbol{\sigma}$ como a un tensor de orden 2.

Se dice, entonces, que es posible interpretar a cualquier tensor $\boldsymbol{\sigma}$ como a un tensor de orden 2, puesto que $\boldsymbol{\sigma}$, a través de una operación de contracción simple, define una *transformación lineal* de vectores en vectores.

Interpretaciones similares pueden extrapolarse para los ejemplos (E.3) a (E.6), lo que conduce a la segunda noción sobre lo que es un tensor:

SEGUNDA noción intuitiva del concepto de tensor:

La operación "producto contraído" permite asimilar a un determinado tensor la noción de "transformación lineal". Es decir, un tensor no es solamente una entidad que tiene, por una parte, un *significado intrínseco* independiente de cualquier sistema de coordenadas y, por otra, un cierto número de *componentes* que caracterizan completamente a dicho tensor en un determinado sistema de referencia, sino que un tensor puede ser entendido como una entidad que

transforma de manera *lineal* unos "objetos tensoriales de cierto orden" en otros "objetos tensoriales" de orden, eventualmente, distinto.

Como nota final en este tema, puede mencionarse que en entornos académicos más ligados a la Matemática que a la Física, el significado intrínseco que se asocia a las *entidades tensoriales* es, precisamente, el hecho de que ellas constituyen transformaciones lineales ignorándose cualquier interpretación geométrica que pudiera estar asociada al significado intrínseco de un tensor, tal como se describió en los párrafos iniciales para las cantidades de naturaleza vectorial. En este

enfoque, se entiende a los tensores como a transformaciones lineales que transforman unos objetos pertenecientes a un cierto *espacio vectorial* (de cierta dimensión) en otros objetos pertenecientes a otro espacio vectorial (de dimensión, eventualmente, diferente del primero).

En este texto no se profundizará en este enfoque dado que los autores estiman que supera el alcance de una asignatura de Mecánica de Sólidos perteneciente a un Grado en Ingeniería. El lector interesado puede, sin embargo, plantearse las siguientes interrogantes:

+ Si se asocia el significado intrínseco de un tensor al concepto de transformación lineal y si los objetos transformados, así como sus imágenes bajo transformación, pertenecen a espacios vectoriales de cierta dimensión, ¿cuáles son las *bases* de dichos espacios vectoriales? ¿Cómo se transforman las bases del dominio en las bases de la imagen bajo transformaciones lineales basadas en operaciones de contracción?
+ Además, puesto que un producto contraído reduce el número de índices necesarios para identificar a las componentes de un tensor, puede intuirse que las transformaciones basadas en contracciones solamente pueden transformar unos espacios vectoriales en otros de dimensión menor o, a lo sumo, igual a la del dominio. Sin embargo, ¿puede concebirse otro tipo de productos – distintos a los productos contraídos – tales que el orden del resultado sea superior al orden de los factores? Es aquí donde surge las noción de "producto diádico" entre tensores o la noción de "díada".

Para un tratamiento completo sobre estos aspectos se refiere al lector a textos específicos tales como Malvern (1969), Love (1944) o Brannon (2010)

1.5. Objetividad y Leyes de Transformación

Se ha indicado que todo tensor de orden n posee 3^n componentes en un determinado sistema de ejes coordenados, las cuales pueden organizarse dentro de una matriz (o "hipermatriz", según el valor de n). Sin embargo, es posible plantear la pregunta inversa:

Dados 3^n valores escalares, ¿puede decirse siempre que ellos definen un tensor de orden $n \geq 1$?

Nótese que esta pregunta no es aplicable al caso particular de los tensores de orden 0, dado que los escalares son los únicos tensores en los que no hay distinción entre su significado intrínseco y sus componentes, puesto que la única componente que caracteriza a un escalar es, por definición, independiente de la orientación del sistema de referencia.

1.5.1. Definiendo un tensor a partir del modo en que sus componentes se transforman

Para responder a la pregunta arriba formulada, debe recordarse que las componentes de un tensor varían según la orientación del sistema de referencia en base a ciertas *leyes de transformación*, las cuales han de permitir expresar las componentes en un sistema de coordenadas *nuevo* a partir de las componentes conocidas en un sistema coordenado *anterior*, que está rotado con respecto al sistema nuevo. Estas leyes de transformación no pueden, sin embargo, definirse arbitrariamente.

> Como mínimo, es exigible que las leyes de transformación:
>
> transfieran al *nuevo* sistema coordenado el *significado* que los 3^n valores escalares poseían en el sistema coordenado *original*.

Para ilustrar este punto, considérese el caso de un vector $\boldsymbol{a}$: existen varias maneras de escoger tres valores numéricos que representen de forma unívoca la magnitud, dirección y sentido de $\boldsymbol{a}$. A través de un *ejemplo* y de un *contraejemplo*, se mostrará a continuación que esta elección es importante, y que guarda relación con lo que se conoce como Principio de Objetividad (o principio de Independencia del Marco de Referencia).

Ejemplo:

Si se escoge tres valores a_i de modo que ellos tengan las propiedades de que (*1*.) su valor absoluto defina el tamaño de las *proyecciones orientadas* de $\boldsymbol{a}$ sobre los tres ejes del sistema de coordenadas O_{123}, y de que (*2*.) su signo defina el sentido de dichas proyecciones orientadas, entonces puede demostrarse recurriendo a trigonometría elemental, que:

los tres valores a_i' obtenidos de acuerdo a la expresión siguiente (en la que se usa la convención de índices repetidos de Einstein):

$$a_i' = R_{ij} a_j \tag{1}$$

poseen también las propiedades de que (*1*.) el valor absoluto de a_i' define el tamaño de las proyecciones orientadas de $\boldsymbol{a}$ sobre los tres ejes de un *nuevo* sistema de coordenadas $(O_{123})'$ que está rotado con respecto al sistema original O_{123}, y de que (*2*.) su signo define el sentido de dichas proyecciones orientadas sobre los ejes del nuevo sistema, siempre y cuando los nueve valores R_{ij} correspondan al coseno del ángulo θ_{ij} comprendido entre el eje i del sistema nuevo $(O_{123})'$ y el eje j del sistema original O_{123}. Esto se denota mediante: $R_{ij} = cos(\theta_{ij})$.

En otras palabras, la ley transformación (1) *transfiere* el significado de las a_i como "proyecciones sobre ejes" del sistema original a los valores nuevos a_i', los cuales siguen pudiendo interpretarse como "proyecciones sobre ejes", aunque ahora sobre los ejes del sistema nuevo.

Más aún, si los tres valores a_i se interpretan ahora como "componentes" de $\boldsymbol{a}$ en O_{123}, puede decirse que la expresión (1) constituye una *ley de transformación de componentes que preserva el significado de las componentes transformadas*.

Nótese que la ley de transformación (1) está basada en una operación de contracción simple que involucra a los valores R_{ij}, valores que pueden ser considerados como las componentes de una "matriz de rotación" R, que es de tamaño 3x3, en general es no-simétrica y que tiene la siguiente propiedad: si tanto O_{123} como $(O_{123})'$ son sistemas de ejes *ortogonales* y si no hay "escalamiento" de las medidas de los ejes entre ambos sistemas, entonces:

$$R^{-1} = R^T \qquad \text{(se dice que } R \text{ es una matriz "ortogonal").}$$

En componentes indexadas, la condición de ortogonalidad se expresa del siguiente modo:

$$R_{ip} R_{jp} = \delta_{ij} \qquad \text{o bien} \qquad R_{pi} R_{pj} = \delta_{ij}$$

Donde δ_{ij} son, como se verá más adelante (apartado 1.6), las componentes de la matriz δ, que es la matriz identidad de tamaño 3x3.

Contraejemplo:

Es fundamental observar que el vector arbitrario $\boldsymbol{a}$ podría también representarse en forma unívoca mediante tres valores numéricos diferentes de los a_i mencionados en el *ejemplo*, y una posibilidad para esta representación alternativa podría ser, por ejemplo, caracterizar a $\boldsymbol{a}$ mediante una magnitud y dos ángulos, los cuales podrían almacenarse en una matriz columna de tamaño 3x1 y de componentes $\overline{a}_i$. Es evidente, en este caso, que si la transformación (1) se aplica sobre los tres valores $\overline{a}_i$ para producir tres valores nuevos $\overline{a}_i'$, estos tres valores resultantes **no poseerán** el mismo significado de "una magnitud y dos ángulos" en el nuevo sistema, tal como el significado que poseían los $\overline{a}_i$ en el sistema original.

En el caso de vectores, una respuesta a la pregunta formulada al inicio de este apartado consiste en "definir" lo que es un vector a partir del modo en que sus componentes se transforman al rotar el sistema de coordenadas:

"Se dice que tres valores escalares, organizados en una matriz columna de tamaño 3x1, son las componentes de un vector si el significado de dichos escalares se preserva cuando sobre ellos se aplica la ley de transformación (1), que se asociada a una rotación del sistema de coordenadas caracterizada por los valores R_{ij}".

Estas consideraciones pueden extrapolarse a tensores de orden superior, lo que conforma la tercera noción sobre lo que es un tensor:

TERCERA noción del concepto de tensor:

Un conjunto de 3^n valores escalares organizados en una matriz (o hipermatriz, según el valor de n) y que se identifican mediante los n índices $i_1, i_2, \dots, i_n$ son las componentes de un tensor $\boldsymbol{T}$ de orden n, si ellos se transforman manteniendo su significado mediante la expresión (2), que consta de n operaciones de contracción en las que intervienen las componentes de la matriz de rotación R.

$$T'_{i_1 i_2 \dots i_n} = R_{i_1 j_1} R_{i_2 j_2} \cdots R_{i_n j_n} T_{j_1 j_2 \dots j_n} \tag{2}$$

En Mecánica de Sólidos son particularmente relevantes ciertos tensores de 2º y de 4º orden. Para ellos, la ley de transformación (2) se particulariza considerando que los 3^2=9 valores escalares σ_{ij} son las componentes del tensor de 2º orden $\boldsymbol{\sigma}$ si ellas se transforman de acuerdo a la expresión (3), mientras que los 3^4=81 valores escalares D_{ijkl} son las componentes del tensor de 4º orden $\boldsymbol{D}$ si ellas se transforman de acuerdo a la expresión (4).

$$\sigma'_{ij} = R_{ip} R_{jq} \sigma_{pq} \tag{3}$$

$$D'_{ijkl} = R_{ip} R_{jq} R_{kr} R_{ls} D_{pqrs} \tag{4}$$

En relación con la ley general de transformación de coordenadas bajo rotación de los ejes coordenados expresada en (2), debe observarse que ella proporciona una forma alternativa de identificar lo que es el "orden" de un tensor: es el número de veces que aparece la matriz de rotación en la ley de transformación, lo cual es consistente, en particular, con el caso de los tensores de orden 0 puesto que para ellos la ley de transformación es $\alpha' = \alpha$, donde no aparece la matriz de rotación.

1.5.2. Variables de interés, ecuaciones de gobierno y elección de la notación

En los apartados iniciales de la presente discusión sobre notación y significado se mencionó que en Mecánica de Sólidos intervienen variables escalares, vectoriales o, en general, tensoriales. Dichas variables han de relacionarse entre sí mediante "ecuaciones de gobierno", algunas de las cuales corresponden a *leyes físicas* de validez general, mientras que otras corresponden a *ecuaciones constitutivas* que describen el comportamiento de cada material en particular.

Se ha mencionado que tres valores escalares definen las componentes de un vector (tensor de orden 1) si ellas se transforman de acuerdo a la expresión (1) cuando se varía la orientación del sistema coordenado. Y se ha indicado también que esto es posible si los tres valores escalares tienen el sentido de *proyecciones orientadas* sobre los ejes considerados. La definición que se ha propuesto para establecer cuándo tres escalares conforman un tensor de orden 1 fue extrapolada a tensores de orden superior; la utilidad de dicha extrapolación, así como la justificación final de porqué es conveniente utilizar variables tensoriales en la elaboración de ecuaciones de gobierno, se hará patente al considerar el denominado Principio de Objetividad.

Si una determinada ecuación de gobierno (sea ésta un principio físico general o una ecuación constitutiva) se formula en términos de una relación matemática entre cantidades de naturaleza tensorial en la que intervienen productos contraídos (y, eventualmente, productos tensoriales), ella puede, en consecuencia, ser expresada tanto en *notación tensorial libre de índices* como en la *notación de componentes indexadas*.

Expresar una cierta ecuación de gobierno en *notación libre de índices* tiene la ventaja de que el significado intrínseco de todas las variables involucradas queda expuesto en forma natural, sin hacer referencia a ningún sistema de coordenadas en particular. Más aún, si esta ecuación de gobierno define una dependencia de unas variables con respecto de otras, en la notación libre de índices quedan también expuestas, de una forma más o menos explícita y natural, las tendencias asociadas a dicha dependencia (dependencia creciente, decreciente, monotonía, etc.)

La desventaja de la *notación libre de índices* es que ella no permite, en sí misma, realizar cálculos prácticos en aplicaciones reales de ingeniería. La realización de cálculos prácticos requiere fijar un cierto sistema de referencia y realizar los cálculos requeridos operando sobre los valores concretos que tienen las componentes de los tensores involucrados en la ecuación de gobierno con la que se esté tratando. Para esto, es ineludible expresar la ecuación de gobierno en la *notación de componentes indexadas*.

1.5.3. Principio de Objetividad

Es de importancia fundamental que al usar la notación indexada, las ecuaciones de gobierno estén planteadas en una forma que sea "invariante" frente a una rotación del sistema de coordenadas y esto es, precisamente, lo que se conoce como *Principio de Objetividad* o principio de *Independencia del Marco de Referencia*.

En la práctica, esto implica que si dos cantidades físicas se relacionan entre sí en un cierto sistema de referencia mediante, por ejemplo, una ley de proporcionalidad, entonces deben relacionarse también mediante una ley de proporcionalidad en cualquier sistema de coordenadas que esté rotado con respecto al sistema considerado originalmente.

Dos ejemplos son los siguientes:

- **Segunda Ley de Newton para una partícula**: "La fuerza neta efectuada sobre una partícula es proporcional a la aceleración experimentada por la misma". Esta es una *ley física* general que puede expresarse tanto en notación tensorial libre de índices como en notación tensorial indexada, en cuyo caso ha de satisfacerse el Principio de Objetividad.

  a) Segunda ley de Newton en notación tensorial libre de índices: $\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{a}$

  b) Segunda ley de Newton en notación indexada:

  Sean f_i y f_i' son las componentes del vector fuerza, respectivamente, en los sistemas de referencia O_{123} y $(O_{123})'$ rotados entre sí; sean a_i y a_i' las componentes de la aceleración y sean m y m' la masa de la partícula. El Principio de Objetividad en este caso indica que la segunda Ley de Newton debe expresarse de la *misma manera* en ambos sistemas de coordenadas (es decir, mediante la misma ley de proporcionalidad). Explícitamente:

  $$f_i = ma_i \quad \text{en } O_{123} \qquad \text{mientras que} \qquad f_i' = m'a_i' = ma_i' \quad \text{en } (O_{123})'$$

  donde se ha usado el hecho de que como la masa es un escalar, no depende de la orientación del sistema de referencia (es decir, $m' = m$).

- **Ley de Fourier para conducción del calor**: "El vector flujo de calor en un punto de un sólido es proporcional al vector gradiente de temperatura". Esta es una *ecuación constitutiva* de tipo lineal aplicable a materiales que son isótropos desde el punto de vista de la conducción del

calor y que puede expresarse – como antes – tanto en notación libre de índices como en notación indexada, en cuyo caso ha de satisfacerse el Principio de Objetividad.

a) Ley de Fourier en notación tensorial libre de índices: $\boldsymbol{q} = -k\boldsymbol{\nabla T}$

b) Ley de Fourier en notación indexada:

Sean q_i y q_i' son las componentes del vector flujo de calor en un punto de un sólido de conductividad térmica k y k', respectivamente, en los sistemas de referencia O_{123} y $(O_{123})'$; sean ∇T_i y $\nabla T_i'$ las componentes del vector gradiente de temperatura evaluadas en ambos sistemas.

Principio de Objetividad:

$$q_i = -k\nabla T_i \quad \text{en } O_{123} \qquad \text{mientras que} \qquad q_i' = -k'\nabla T_i' = -k\nabla T_i' \quad \text{en } (O_{123})'$$

donde se ha usado el hecho de que, como en este modelo constitutivo la conductividad es un escalar, no depende del sistema de referencia (es decir, $k' = k$).

Los dos ejemplos anteriores son casos particulares de ecuaciones de gobierno que relacionan dos vectores, por ejemplo $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, a través de una constante de proporcionalidad escalar, de modo que en notación tensorial libre de índices dicha relación se expresa como $\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}$.

Cuando esta ecuación de gobierno genérica fue expresada en componentes indexadas en ambos sistemas de referencia en acuerdo al Principio de Objetividad, no se hizo ninguna referencia a la ley de transformación que transforma las componentes a_i en a_i' ni a las b_i en b_i'. Es evidente, sin embargo, que no cualquier ley de transformación de componentes es capaz de preservar el necesario Principio de Objetividad. Es pertinente plantear, entonces, la pregunta de si la ley de transformación (1) posee, precisamente, la propiedad de preservar este principio.

Para responder a esta pregunta, considérese la expresión de esta ecuación de gobierno en notación indexada en el sistema O_{123}:

$$a_i = \alpha b_i \tag{5}$$

Si la expresión (5) es pre-multiplicada a ambos lados por R_{pi} se obtiene la expresión (6), donde se ha considerado que α es un escalar y aparece, por tanto, como factor común:

$$R_{pi}a_i = R_{pi}(\alpha b_i) = \alpha R_{pi}b_i \tag{6}$$

Si se considera ahora la ley de transformación (1), entonces es natural reconocer en la expresión (6) a las componentes transformadas $a_p' = R_{pi}a_i$ y $b_p' = R_{pi}b_i$. Con este cambio de variables, la expresión (6) se puede reescribir como $a_p' = \alpha b_p'$. Dado que en esta última el índice p es un *índice libre*, puede sustituirse p por i para obtener (7), en la que se ha usado el hecho de que α es escalar (es decir, $\alpha = \alpha'$).

$$a_i' = \alpha b_i' = \alpha' b_i' \tag{7}$$

Esta última expresión es, precisamente, la ecuación de gobierno, escrita ahora en el sistema $(O_{123})'$ y se constata directamente que (7) representa la *misma relación de proporcionalidad* que (5).

En el caso de una ecuación de gobierno del tipo $a_i = \alpha b_i$, el Principio de Objetividad queda automáticamente garantizado si para las componentes de los vectores involucrados se utiliza el sentido de "*proyección orientada*" en conjunto con la ley de transformación (1).

Estas consideraciones pueden extrapolarse a otras ecuaciones de gobierno más sofisticadas en las que intervengan no solamente tensores de orden superior sino también multiplicidad de operaciones de contracción (y, eventualmente incluso, de productos tensoriales o diádicos).

Supongamos ahora que una determinada ecuación de gobierno relaciona entre sí a dos vectores, por ejemplo $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, a través de una relación de proporcionalidad, de modo tal que el factor de proporcionalidad entre ambos vectores es una *cierta cantidad física*, por ejemplo $\boldsymbol{\sigma}$, que requiere dos índices para identificar sus componentes. En otras palabras, esta ecuación de gobierno tiene la estructura definida por $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{b}$ en notación libre de índices (y podemos observar que esta estructura encaja con el ejemplo **E.2** del apartado 1.3 sobre productos contraídos).

En notación indexada, una ecuación de gobierno como la anterior se escribe según indica la expresión (8) en el sistema de coordenadas O_{123}.

$$a_i = \sigma_{ij} b_j \tag{8}$$

Si esto es así, es razonable esperar, en virtud del Principio de Objetividad, que esta ecuación de gobierno se exprese según (9) en el sistema $(O_{123})'$.

$$a'_i = \sigma'_{ij} b'_j \tag{9}$$

Puesto que se ha supuesto por hipótesis que $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son vectores, sus componentes se transforman de acuerdo a (1). Por otra parte, sobre $\boldsymbol{\sigma}$ sólo se ha especificado que es una *cierta cantidad física* sin asumir, a priori, que posee el carácter de un tensor de orden 2 y que sus componentes se transforman, por tanto, de acuerdo a (3). Sin embargo, en estas condiciones y en completa analogía con lo que ocurrió antes para leyes del tipo $\boldsymbol{a} = \alpha \boldsymbol{b}$, puede demostrarse que para una ecuación de gobierno del tipo $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{b}$, el Principio de Objetividad se satisface en forma automática si las componentes de $\boldsymbol{\sigma}$ se transforman de acuerdo a la expresión (3) o, lo que es lo mismo, si la cantidad física $\boldsymbol{\sigma}$ es, en efecto, un tensor de 2º orden. La demostración se deja como ejercicio.

El hecho de que sea posible obtener (9) a partir de (8) en conjunto con las transformaciones (1) y (3), ejemplifica nuevamente la ventaja de establecer ecuaciones de gobierno en un lenguaje que recurre a variables tensoriales y operaciones de contracción.

Existen varios casos en Mecánica de Sólidos en los que una ecuación de gobierno posee la estructura $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{b}$ y el ejemplo más relevante es, posiblemente, el del tensor de tensiones que relaciona un vector unitario $\boldsymbol{n}$ que es perpendicular a un cierto plano con otro vector – el vector tensión $\boldsymbol{t}$ o vector de "tracciones" – que posee dos componentes intrínsecas, una perpendicular y otra paralela al plano definido por $\boldsymbol{n}$. La forma de esta ecuación de gobierno es, precisamente, $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}$.

Considérese por último, el caso de una ecuación de gobierno del tipo $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D} : \boldsymbol{\varepsilon}$, en la que se relaciona a dos tensores de segundo orden a través de una relación de proporcionalidad, de modo tal que el factor de proporcionalidad $\boldsymbol{D}$ es una *cierta cantidad física* que requiere cuatro índices para identificar sus componentes (y podemos observar que esta estructura encaja con el ejemplo **E.5** del apartado 1.3 sobre productos contraídos).

En notación indexada, esto se expresa como $\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl}$ en el sistema O_{123}. A su vez, en virtud del Principio de Objetividad se espera que $\sigma'_{ij} = D'_{ijkl} \varepsilon'_{kl}$ en el sistema $(O_{123})'$.

Puesto que se ha supuesto por hipótesis que $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\varepsilon}$ son tensores de 2º orden, sus componentes se transforman de acuerdo a (3). En estas condiciones, puede demostrarse que el Principio de Objetividad se satisface en forma automática si las componentes de $\boldsymbol{D}$ se transforman de acuerdo a la expresión (4); esto es, que el factor de proporcionalidad $\boldsymbol{D}$ sea, en efecto, un tensor de 4º orden y que los 81 escalares D_{ijkl} (o bien D'_{ijkl}) sean, efectivamente, las componentes de dicho tensor en O_{123} (o bien, en $(O_{123})'$).

Un ejemplo canónico en Mecánica de Sólidos de una ecuación de gobierno del tipo $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D} : \boldsymbol{\varepsilon}$ lo constituye la ecuación constitutiva de los materiales elásticos y lineales. En este caso, $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\varepsilon}$ son, respectivamente, los tensores de tensiones y deformaciones, mientras que $\boldsymbol{D}$ es el denominado "tensor de rigidez elástica" del material, cuyas componentes contienen información sobre las *propiedades elásticas* del material (por ejemplo, el módulo de Young y el coeficiente de Poisson, en el caso de que el material sea isótropo).

En relación a los ejemplos de productos contraídos (E.1) a (E.6), puede observarse que existen muchos casos de ecuaciones de gobierno relevantes en Mecánica de Sólidos que se ajustan en su estructura formal a alguna de las formas contenidas en estos ejemplos. En todos estos casos (aunque también en otros que no están contenidos en las formas E.1 a E.6), la ventaja del uso de variables tensoriales definidas a partir del modo en que se rotan sus componentes es ahora evidente.

Resumen sobre Tensores:

- Un tensor de orden *n* es una entidad que tiene un sentido físico intrínseco, así como un número 3^n de componentes que dependen de la *orientación* de un determinado sistema de coordenadas.
- Un tensor de orden *n* puede ser asimilado a una transformación lineal. Como tal, transforma elementos de un espacio vectorial de cierta dimensión en elementos de otro espacio vectorial de dimensión eventualmente diferente.
- Si bien todo tensor de orden *n* posee 3^n componentes escalares que pueden ser organizadas en una matriz (o hipermatriz), no es cierto que todo conjunto de 3^n valores escalares almacenados en una matriz o hipermatriz contiene a las componentes de un tensor.
- 3^n valores escalares son las componentes de un tensor de orden *n* si ellos se transforman de acuerdo a la expresión (2) cuando se rota el sistema de coordenadas.
- El uso de variables tensoriales en la formulación de ecuaciones de gobierno es ventajosa pues ayuda (aunque no garantiza) a que se satisfaga el Principio de Objetividad.

1.6. Tensores de 2º y 4º orden relevantes en Mecánica de Sólidos

1.6.1. Tensor identidad de 2º orden.

Se define como "*tensor identidad de* 2º *orden*" al tensor $\boldsymbol{\delta}$ que, mediante una operación de contracción simple, transforma un vector en sí mismo (o bien, transforma un tensor de 2º orden en sí mismo).

Las componentes de $\boldsymbol{\delta}$ coinciden con el símbolo denominado "Delta de Krönecker" y su valor es:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$$

En notación matricial, el tensor $\boldsymbol{\delta}$ corresponde a la matriz identidad: $\delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Si $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{\sigma}$ son respectivamente un vector y un tensor de 2º orden, entonces las mencionadas *transformaciones idénticas* se escriben como:

Notación tensorial: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{v}$; $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{\sigma}$.

Notación indexada: $v_i = \delta_{ij} v_j$; $\sigma_{ij} = \delta_{ip} \sigma_{pj}$

Notación matricial: $v = \delta v$; $\sigma = \delta\sigma = \sigma\delta$

1.6.2. Traspuesta de un tensor de 2º orden. Tensor traspositor.

Si $\boldsymbol{a}$ es un tensor de 2º orden de componentes a_{ij} en un sistema coordenado. Se denota como $\boldsymbol{a^T}$ al tensor "traspuesto de $\boldsymbol{a}$", cuyas componentes son $a^T_{ij} = a_{ji}$.

Es evidente que la operación de trasposición es una operación lineal; es decir, se cumple que $(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b})^T = \alpha\boldsymbol{a^T} + \beta\boldsymbol{b^T}$. Si esto es así, debe existir un tensor de 4º orden que transforme un tensor de 2º orden en su traspuesto. En efecto, dicho ***tensor traspositor*** existe, se denota por $\boldsymbol{I^{tr}}$ y sus componentes son $I^{tr}_{ijkl} = \delta_{il}\delta_{jk}$.

Notación tensorial: $\boldsymbol{a^T} = \boldsymbol{I^{tr}} : \boldsymbol{a}$

Notación indexada: $a^T_{ij} = I^{tr}_{ijkl} a_{kl} = \delta_{il}\delta_{jk} a_{kl} = a_{ji}$

1.6.3. Tensores simétricos de 2º orden:

Se dice que un tensor de 2º orden es simétrico si:

$$\boldsymbol{a^T} = \boldsymbol{a} \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = a_{ji} \quad \Leftrightarrow \quad a^T = a$$

1.6.4. Tensores anti-simétricos de 2º orden:

Se dice que un tensor de 2º orden es anti-simétrico si:

$$\boldsymbol{a^T} = -\boldsymbol{a} \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = -a_{ji} \quad \Leftrightarrow \quad a^T = -a$$

Nota: Algunos autores usan el término "hemisimétrico" en lugar de "antisimétrico".

1.6.5. Parte simétrica de un tensor arbitrario de 2º orden:

Si $\boldsymbol{a}$ es un tensor de segundo orden, posiblemente no-simétrico, se dice que la "parte simétrica de $\boldsymbol{a}$" es el tensor simétrico de 2º orden $\boldsymbol{a_s}$, que se denota como $\boldsymbol{a_s} = sym(\boldsymbol{a})$ y que se obtiene como:

Notación tensorial: $\boldsymbol{a_s} = sym(\boldsymbol{a}) = \frac{1}{2}\{\, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{T}} \,\}$

Notación indexada: $(\boldsymbol{a_s})_{ij} = \frac{1}{2}\{\, a_{ij} + a_{ji} \,\}$

Propiedad: Si $\boldsymbol{\sigma}$ es un tensor simétrico de 2º orden, entonces $\boldsymbol{\sigma} = sym(\boldsymbol{\sigma})$

1.6.6. Parte antisimétrica de un tensor arbitrario de 2º orden:

Si $\boldsymbol{a}$ es un tensor de segundo orden, posiblemente no-simétrico, se dice que la "parte antisimétrica de $\boldsymbol{a}$" es el tensor antisimétrico de 2º orden $\boldsymbol{a_a}$, que se denota como $\boldsymbol{a_a} = skew(\boldsymbol{a})$ y que se obtiene como:

Notación tensorial: $\boldsymbol{a_a} = skew(\boldsymbol{a}) = \frac{1}{2}\{\, \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{T}} \,\}$

Notación indexada: $(\boldsymbol{a_a})_{ij} = \frac{1}{2}\{\, a_{ij} - a_{ji} \,\}$

Propiedad: Si $\boldsymbol{b}$ es un tensor antisimétrico de 2º orden, entonces $\boldsymbol{b} = skew(\boldsymbol{b})$

Nota: el término "skew" en la transformación $skew(\ \ )$ proviene de la denominación inglesa "skew-symmetric".

1.6.7. Componentes hidrostática y desviadora de un tensor simétrico de 2º orden

Todo tensor simétrico de 2º orden $\boldsymbol{a}$ puede descomponerse aditivamente en una *componente hidrostática* $\boldsymbol{a^h}$ y una *componente desviadora* $\boldsymbol{a^d}$ del siguiente modo:

Notación tensorial: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a^h} + \boldsymbol{a^d}$

Notación indexada: $a_{ij} = a^h_{ij} + a^d_{ij}$

Donde: $\boldsymbol{a^h} = \frac{1}{3} tr(\boldsymbol{a})\, \boldsymbol{\delta}$; sus componentes son $a^h_{ij} = \frac{1}{3} a_{kk} \delta_{ij}$

$\boldsymbol{a^d} = \boldsymbol{a} - \frac{1}{3} tr(\boldsymbol{a})\, \boldsymbol{\delta}$; sus componentes son $a^d_{ij} = a_{ij} - \frac{1}{3} a_{kk} \delta_{ij}$

1.6.8. Tensores isótropos.

Se dice que un tensor $\boldsymbol{T}$ de orden n es ***isótropo*** si sus componentes permanecen invariantes frente a cualquier cambio en la orientación del sistema de referencia. En otras palabras, recordando que un tensor de orden n se transforma de acuerdo a (2), entonces

$\boldsymbol{T}$ es isótropo $\quad \Leftrightarrow \quad T'_{i_1 i_2 \ldots i_n} = R_{i_1 j_1} R_{i_2 j_2} \cdots R_{i_n j_n} T_{j_1 j_2 \ldots j_n} = T_{i_1 i_2 \ldots i_n} \quad \forall R$ ortogonal

Un tensor isótropo es, entonces, un ***tipo particular*** de tensor cuyas componentes son independientes de la orientación del sistema de coordenadas en el que ellas sean medidas.

1.6.9. Tensores isótropos de 1º orden

El único vector isótropo es el vector nulo (es decir, no existen vectores isótropos no nulos)

1.6.10. Tensores isótropos de 2º orden

Un tensor de 2º orden $\boldsymbol{a}$ es isótropo si existe un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{\delta} \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = \alpha\delta_{ij} \quad \Leftrightarrow \quad a = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

1.6.11. Tensor identidad de 4º orden para tensores simétricos:

La transformación $sym(\ \ )$ que se definió en el apartado 1.6.5 es claramente una transformación lineal. Si esto es así, debe existir un tensor de 4º orden que transforme un tensor de 2º orden en su "parte simétrica". En efecto, este tensor existe, se denota mediante el símbolo $\boldsymbol{I^{(4s)}}$ y se mostrará a continuación cómo puede construirse tal tensor:

i. Considérese el tensor de 4º orden $\boldsymbol{I}$, cuyas componentes son $I_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$. Si $\boldsymbol{a}$ es un tensor de 2º orden *arbitrario* (posiblemente no-simétrico), entonces el tensor $\boldsymbol{I}$ verifica lo siguiente:

Notación tensorial: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{I} : \boldsymbol{a}$

Notación indexada: $a_{ij} = I_{ijkl}\, a_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}\, a_{kl}$

Debe observarse que $\boldsymbol{I}$ transforma un tensor de 2º orden *arbitrario* en sí mismo.

ii. Si se considera ahora la semisuma de $\boldsymbol{I}$ con el tensor traspositor $\boldsymbol{I^{tr}}$ definido anteriormente en el apartado 1.6.2, se observa que su efecto sobre un tensor *arbitrario* de 2º orden es el siguiente:

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\{\boldsymbol{I} + \boldsymbol{I^{tr}}\} : \boldsymbol{a} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\{\boldsymbol{I} : \boldsymbol{a} + \boldsymbol{I^{tr}} : \boldsymbol{a}\} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a^T}\} = sym(\boldsymbol{a})$$

Donde se ha utilizado la propiedad distributiva de la doble contracción.

Es evidente que la semi-suma mencionada en (***ii.***) es, precisamente, un tensor de 4º orden que transforma a un tensor de 2º orden en su parte simétrica. Tiene sentido, por tanto, definir $\boldsymbol{I^{(4s)}}$ como:

Notación tensorial: $\boldsymbol{I^{(4s)}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\{\boldsymbol{I} + \boldsymbol{I^{tr}}\}$

Notación indexada: $I^{(4s)}_{ijkl} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\{\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\}$

Observación:

En principio, podría utilizarse al tensor $\boldsymbol{I}$ como "*tensor identidad*" para tensores arbitrarios de 2º orden (tanto simétricos como no-simétricos). Sin embargo, esta elección presenta ciertas dificultades en el caso de tensores simétricos de 2º orden, dificultades que están asociadas a una imposibilidad de definir de manera *única* la derivada de un tensor simétrico con respecto a sí mismo.

Para solventar esta dificultad, se ***escoge*** definir como "***tensor identidad de 4º orden para tensores simétricos***" al tensor simetrizante $\boldsymbol{I^{(4s)}}$. Algunos autores denominan $\boldsymbol{I^{(4s)}}$ como "*tensor identidad simétrica de* 4º *orden*" o, simplemente, "*tensor simetrizante*".

Resumen de las propiedades de $\boldsymbol{I^{(4s)}}$:

- Como todo tensor de 4º orden, $\boldsymbol{I^{(4s)}}$ transforma linealmente tensores de 2º orden en tensores de 2º orden bajo una operación de doble contracción.
- Si $\boldsymbol{a}$ es un tensor *simétrico* de 2º orden, de modo que $a_{ij} = a_{ji}$, entonces $\boldsymbol{I^{(4s)} : a = a}$, propiedad que caracteriza a $\boldsymbol{I^{(4s)}}$ como a un "*tensor identidad para tensores simétricos*".
- Si $\boldsymbol{a}$ es un tensor *no-simétrico* de 2º orden, de modo que $a_{ij} \neq a_{ji}$, entonces es sencillo demostrar que $\boldsymbol{I^{(4s)} : a = sym(a) \neq a}$, propiedad que caracteriza a $\boldsymbol{I^{(4s)}}$ como un "*tensor simetrizante*".
- Las dos propiedades anteriores impiden atribuir a $\boldsymbol{I^{(4s)}}$ el carácter de un "tensor identidad" general, válido para tensores de 2º orden arbitrarios (posiblemente no-simétricos); $\boldsymbol{I^{(4s)}}$sólo opera como tensor identidad para tensores simétricos.

1.6.12. Proyector hidrostático de 4º orden

En relación con la descomposición aditiva presentada en 1.6.7, puede observarse que la operación que transforma a un tensor en su componente hidrostática es una operación lineal; por lo tanto, debe existir un tensor de 4º orden asociado a dicha transformación. En efecto, dicho tensor existe, se denota $\boldsymbol{J}$ y sus componentes son $J_{ijkl} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}$

Este tensor se denomina "***proyector hidrostático de 4º orden***" y su efecto sobre un tensor simétrico de 2º orden $\boldsymbol{a}$, mediante doble contracción es el siguiente:

Notación tensorial: $\boldsymbol{a^h = J : a}$

Notación indexada: $a^h_{ij} = J_{ijkl}a_{kl} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\, a_{kl} = \frac{1}{3}\delta_{ij}(a_{kk})$

1.6.13. Proyector desviador de 4º orden

En analogía con lo expresado en 1.6.12, existe un tensor de 4º orden que transforma tensores simétricos de 2º orden en su componente desviadora. Dicho tensor se denota $\boldsymbol{K}$ y se define como $\boldsymbol{K = I^{(4s)} - J}$

Este tensor se denomina "***proyector desviador de 4º orden***" y su efecto mediante doble contracción sobre un tensor simétrico de 2º orden $\boldsymbol{a}$, es el siguiente:

Notación tensorial: $\boldsymbol{a^d = K : a = \{I^{(4s)} - J\} : a}$

Notación indexada: $a^d_{ij} = K_{ijkl}a_{kl} = \left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\{\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\right]a_{kl} = a_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}(a_{kk})$

1.6.14. Seis propiedades de los proyectores hidrostático y desviador

$$\boldsymbol{J : K = K : J = 0} \qquad \boldsymbol{J : J = J}$$

$$\boldsymbol{J :: K = K :: J} = 0 \qquad \boldsymbol{J :: J} = 1$$

$$\boldsymbol{K : K = K}$$

$$\boldsymbol{K :: K} = 5$$

1.6.15. Una descomposición aditiva para $\boldsymbol{I^{(4s)}}$

De las definiciones presentadas en 1.6.12 y en 1.6.13, es evidente que:

$$\boldsymbol{I^{(4s)} = J + K}$$

1.6.16. Tensores isótropos de 4º orden

Consideremos los tensores de 4º orden $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{I^{tr}}$ y $\boldsymbol{J}$, cuyas componentes fueron definidas en apartados anteriores 1.6.11, 1.6.2 y 1.6.12, respectivamente, y que a continuación se recuerdan:

$$I_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} \quad ; \quad I^{tr}_{ijkl} = \delta_{il}\delta_{jk} \quad ; \quad J_{ijkl} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}$$

Puede demostrarse, recurriendo a las transformaciones definidas en la expresión (4) que estos tres tensores son *tensores isótropos*. Esto es:

$$I_{ijkl} = \left(I_{ijkl}\right)' \quad ; \quad I^{tr}_{ijkl} = \left(I^{tr}_{ijkl}\right)' \quad ; \quad J_{ijkl} = \left(J_{ijkl}\right)' \qquad \forall R \text{ ortogonal}$$

Definición: un tensor de 4º orden $\boldsymbol{D}$ es "*isótropo*" si existen tres escalares $a, b, c \in \mathbb{R}$ que permitan expresar $\boldsymbol{D}$ como una combinación lineal de $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{I^{tr}}$ y $\boldsymbol{J}$. Esto es:

$$\boldsymbol{D} = a\boldsymbol{I} + b\boldsymbol{I^{tr}} + c\boldsymbol{J}$$

Se presenta a continuación tres propiedades importantes, que tienen aplicaciones notables en Elasticidad Lineal e Isótropa, como se verá más adelante, en el apartado 3.4.

Propiedad 1:

Un tensor isótropo de 4º orden $\boldsymbol{D}$ es, además, un "*tensor simetrizante*" si y solo si $a = b$. Es decir, si los coeficientes de $\boldsymbol{I}$ y $\boldsymbol{I^{tr}}$ están balanceados:

$$\boldsymbol{D} = a\{\boldsymbol{I} + \boldsymbol{I^{tr}}\} + c\boldsymbol{J} = 2a\boldsymbol{I^{(4s)}} + c\boldsymbol{J}$$

En este caso, $\boldsymbol{D}$ es un tensor isótropo que transforma tensores *arbitrarios* de 2º orden en tensores *simétricos* de 2º orden.

Propiedad 2:

Considerando lo anterior, así como la descomposición aditiva presentada en el apartado 1.6.15 para $\boldsymbol{I^{(4s)}}$, un tensor de 4º orden $\boldsymbol{D}$ es un "*tensor isótropo y simetrizante*" si y solo si existen dos escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\boldsymbol{D} = \alpha\boldsymbol{J} + \beta\boldsymbol{K}$$

Obsérvese que las 81 componentes escalares de $\boldsymbol{D}$ quedan *completamente caracterizadas* en términos de los 2 escalares α y β, los cuales son independientes entre sí.

Propiedad 3:

Sea $\boldsymbol{D}$ es un tensor de 4º orden isótropo y simetrizante y sean α y β los escalares que caracterizan la descomposición aditiva descrita en la **Propiedad 2**. Entonces, la inversa de $\boldsymbol{D}$ existe si y solo si $\alpha, \beta \neq 0$, en cuyo caso $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{D^{-1}}$ es también un tensor isótropo y simetrizante, que se calcula como:

$$\boldsymbol{D} = \alpha \boldsymbol{J} + \beta \boldsymbol{K} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{D^{-1}} = \frac{1}{\alpha}\boldsymbol{J} + \frac{1}{\beta}\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$$

Donde es directo verificar (usando las propiedades dadas en 1.6.14) que:

$$\boldsymbol{C} : \boldsymbol{D} = \boldsymbol{D} : \boldsymbol{C} = \boldsymbol{I^{(4s)}}$$

2. Lista de Símbolos

- $\boldsymbol{\sigma}$ o bien σ_{ij} : tensor de tensiones, o bien, componentes del tensor en un determinado sistema de coordenadas.
- $\boldsymbol{s}$ o bien s_{ij} : tensor de tensiones desviadoras, o bien, componentes de dicho tensor desviador en un determinado sistema de coordenadas.
- $\boldsymbol{\sigma^h}$ o bien σ_{ij}^h : tensor hidrostático, o bien, componentes de dicho tensor en un determinado sistema de coordenadas.
- $\boldsymbol{e}$ o bien e_{ij} : deformación desviadora (tensor), o bien, componentes de dicho tensor en un determinado sistema de coordenadas.
- $\boldsymbol{e^{el}}$ y $\boldsymbol{e^{pl}}$: componentes elástica y plástica de la deformación desviadora (tensores).
- $\boldsymbol{\varepsilon^h}$ o bien ε_{ij}^h : tensor deformación hidrostática, o bien, componentes de dicho tensor en un determinado sistema de coordenadas.

- q : tensión equivalente de von Mises (escalar).
- $\overline{\sigma}$: tensión hidrostática (escalar) asociada al tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$
- p : presión hidrostática (escalar) asociada al tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$
- ε^{vol} : deformación volumétrica (escalar).
- $\bar{\varepsilon}^p$: deformación plástica equivalente (escalar).
- $\bar{\varepsilon}_T^p$: definición alternativa de deformación plástica equivalente (escalar, usada en la Teoría Total de la plasticidad).
- $\bar{e}$: deformación desviadora equivalente (escalar, usada en la Teoría Total de la plasticidad).

- E y ν : constantes elásticas de un material elástico e isótropo. Módulo de Young y coeficiente de Poisson, respectivamente.
- G y K : constantes elásticas alternativas de un material elástico e isótropo. Módulo de cortadura y módulo de compresibilidad, respectivamente.
- G_{sec} : módulo de cortadura *elástico* y módulo de cortadura *secante*.

- σ_Y : límite elástico medido en un ensayo en tensión (o compresión) uniaxial.
- $\sigma_Y = H(\bar{\varepsilon}^p)$: función de endurecimiento en términos de deformación (*strain hardening*).
- $\sigma_Y = H_T(\bar{e})$: forma alternativa de la función de endurecimiento en términos de deformación (*strain hardening*); esta forma alternativa se utiliza en la Teoría Total de la plasticidad.
- $\sigma_Y = F(W^p)$: función de endurecimiento en términos de trabajo plástico acumulado (*work hardening*).

3. Formulario comentado

3.1. Sobre el tensor de tensiones: invariantes y descomposición aditiva

Todo tensor simétrico de segundo orden, tal como el tensor de tensiones, posee tres invariantes. Por otra parte, debe observarse que cualquier otra cantidad que se obtenga mediante recombinación algebraica de estos invariantes, será también un invariante.

El tensor de tensiones, en particular, posee dos familias de invariantes de interés en Mecánica de Sólidos: una de ellas contiene a los tres invariantes básicos (o ***invariantes de Cauchy***), mientras que la otra contiene a tres invariantes derivados (que se conocen como ***invariantes genéricos***).

Aunque a todos estos invariantes puede atribuirse una cierta interpretación geométrica, todos ellos emanan, de alguna forma, de la ecuación característica.

- **Tensor de tensiones en una referencia genérica**:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

- **Tensor de tensiones referido a las direcciones principales**:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

  donde σ_1, σ_2 y σ_3 se conocen como ***tensiones principales*** y corresponden a las tres soluciones de la ***ecuación característica***:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = -\left[\sigma^3 - \tilde{I}_1\sigma^2 + \tilde{I}_2\sigma - \tilde{I}_3\right] = 0$$

  Nota: dado que σ es un tensor simétrico, sus autovalores son, necesariamente, números reales. Es decir, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \mathbb{R}$ (la demostración puede consultarse en textos sobre álgebra lineal).

- **Invariantes de Cauchy de σ**: $\tilde{I}_1$, $\tilde{I}_2$, $\tilde{I}_3$

  Estos invariantes se obtienen de los coeficientes de la ecuación característica:

$$\tilde{I}_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \qquad = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$\tilde{I}_2 = \left(\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} - \tau_{xy}^{\ 2} - \tau_{xz}^{\ 2} - \tau_{yz}^{\ 2}\right) \qquad = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1$$

$$\tilde{I}_3 = \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \tau_{xz}\tau_{zx}\sigma_{yy} - \tau_{xy}\tau_{yx}\sigma_{zz} - \tau_{yz}\tau_{zy}\sigma_{xx} \qquad = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

  Nótese que, en principio, no hay restricciones sobre el signo de ninguno de los tres invariantes de Cauchy.

- **<u>Invariantes Genéricos de $\boldsymbol{\sigma}$</u>:** $I_1,\ I_2,\ I_3$

  Se obtienen a partir de los invariantes de Cauchy:

$$I_1 = \tilde{I}_1 = tr(\sigma) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\tilde{I}_1^{\,2} - \tilde{I}_2 = \frac{1}{2}tr(\sigma^2) = \frac{1}{2}tr(\sigma_{ip}\sigma_{pj}) = \frac{1}{2}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2\right)$$

$$I_3 = \frac{1}{3}\tilde{I}_1^{\,3} - \tilde{I}_1\tilde{I}_2 + \tilde{I}_3 = \frac{1}{3}tr(\sigma^3) = \frac{1}{3}tr(\sigma_{ip}\sigma_{pq}\sigma_{qj}) = \frac{1}{3}\left(\sigma_1^3 + \sigma_2^3 + \sigma_3^3\right)$$

  Nótese que el segundo invariante genérico de $\boldsymbol{\sigma}$ es $I_2 \geq 0$, mientras que, en principio, no existen otras restricciones en cuanto al signo de I_1 e I_3.

- **<u>Descomposición aditiva de σ en sus componentes hidrostática y desviadora</u>:**

  Desc. aditiva expresada en forma tensorial: $\sigma = \sigma^h + s$

  Desc. aditiva expresada "componente a componente": $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^h + s_{ij} = \overline{\sigma}\,\delta_{ij} + s_{ij}$

  Desc. aditiva expresada en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \overline{\sigma}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{xx} & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{yx} & s_{yy} & s_{yz} \\ s_{zx} & s_{zy} & s_{zz} \end{bmatrix}$$

- **<u>Tensor desviador en una referencia genérica</u>**:

$$\begin{bmatrix} s_{xx} & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{yx} & s_{yy} & s_{yz} \\ s_{zx} & s_{zy} & s_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \overline{\sigma} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} - \overline{\sigma} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} - \overline{\sigma} \end{bmatrix}$$

- **<u>Invariantes Genéricos del tensor desviador "*s*"</u> :** $J_1,\ J_2,\ J_3$

$$J_1 = tr(s) = 0$$

$$J_2 = \frac{1}{2}tr(s^2) = \frac{1}{2}\left(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2\right) = I_2 - \frac{I_1^{\,2}}{6} = \frac{1}{6}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2\right]$$

$$J_3 = \frac{1}{3}tr(s^3) = \frac{1}{3}\left(s_1^3 + s_2^3 + s_3^3\right) = I_3 - \tfrac{2}{3}I_1I_2 + \tfrac{2}{27}I_1^3$$

  donde s_1, s_2 y s_3 se conocen como ***tensiones desviadoras principales*** correspondientes a los tres autovalores del tensor desviador.

3.2. Sobre el tensor de deformaciones

- **Relación deformación-desplazamiento**

  El tensor de deformaciones que se considera en esta colección de problemas es, en general, el denominado tensor de "*pequeñas de formaciones*" o tensor de "*deformaciones infinitesimales*", cuyas componentes se obtienen del vector de desplazamientos del siguiente modo:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right\}$$

  Esta es la definición más comúnmente utilizada en ingeniería mecánica para el tensor de deformaciones; sin embargo, no es la única definición posible y su validez está sujeta a las siguientes dos restricciones:

  (a) Los desplazamientos son pequeños, de manera que las coordenadas materiales X_i son muy parecidas a las coordenadas espaciales x_i.

  (b) Las componentes del gradiente del campo de desplazamientos, esto es, las cantidades $\partial u_p/\partial X_q$ son "pequeñas" en comparación con la "unidad".

  Como se apreciará en la resolución de los problemas (2.2) y (2.3), las componentes de la diagonal del tensor de deformaciones proporcionan tres deformaciones nominales (o ingenieriles) en la dirección de los ejes coordenados x_1, x_2, x_3.

- **Invariantes de $\boldsymbol{\varepsilon}$**

  Así como el tensor de tensiones posee dos familias de invariantes – los invariantes de Cauchy y los invariantes genéricos – también en el caso del tensor de deformaciones puede identificarse esos mismos invariantes, los cuales pueden calcularse utilizando las mismas fórmulas del apartado anterior, aplicadas a las componentes de $\boldsymbol{\varepsilon}$.

- **PRIMERA descomposición aditiva de $\boldsymbol{\varepsilon}$**: componentes hidrostática y desviadora.

  Desc. aditiva expresada en forma tensorial: $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^h + \boldsymbol{e}$

  Desc. aditiva expresada "componente a componente": $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^h + e_{ij} = \frac{\varepsilon^{vol}}{3}\delta_{ij} + e_{ij}$

  Desc. aditiva expresada en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \frac{\varepsilon^{vol}}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{bmatrix}$$

  Donde las componentes tangenciales se relacionan con la deformación angular de cortadura de acuerdo a $\varepsilon_{ij} = e_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij} \quad \forall i \neq j$

- **SEGUNDA descomposición aditiva de $\boldsymbol{\varepsilon}$**: componentes elástica y plástica.

  Desc. aditiva expresada en forma tensorial: $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{el} + \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$

  Desc. aditiva expresada "componente a componente": $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{el} + \varepsilon_{ij}^{pl}$

- **Descomposiciones aditivas combinadas**:

  Ambas descomposiciones combinadas $\varepsilon_{ij} = \left\{ \varepsilon_{ij}^{h.el} + \varepsilon_{ij}^{h.pl} \right\} + \left\{ e_{ij}^{el} + e_{ij}^{pl} \right\}$

- **Hipótesis aplicable a metales**: $\varepsilon_{ij}^{h.pl} = 0$

  Esta hipótesis es consecuencia de que, por una parte, sólo las solicitaciones mecánicas de naturaleza ***desviadora*** son capaces de originar deslizamiento de dislocaciones y que, por otra, el deslizamiento de dislocaciones es un fenómeno que ***no involucra cambios de volumen***.

  La consecuencia es que la deformación plástica es íntegramente desviadora: $\varepsilon_{ij}^{pl} = e_{ij}^{pl}$

3.3. Algunas variables equivalentes

Tensión equivalente de von Mises (tres expresiones alternativas):

$$q = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} \quad ; \quad q = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2\right]} \quad ; \quad q = \sqrt{3J_2}$$

Tensión hidrostática; presión hidrostática (escalares):

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3}\sigma_{ii} = \frac{1}{3}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right) = \frac{1}{3}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right) = -p$$

Deformación hidrostática y deformación volumétrica (escalares):

$$\varepsilon^h = \frac{1}{3}\varepsilon^{\text{vol}} = \frac{1}{3}\left(\varepsilon_I + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{III}\right)$$

Deformación plástica equivalente (o "acumulada"):

$$d\bar{\varepsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p} \quad ; \quad \bar{\varepsilon}^p = \int d\bar{\varepsilon}^p$$

Deformación plástica equivalente (usada en la Teoría Total de la Plasticidad):

$$\bar{\varepsilon}_T^p = \sqrt{\frac{2}{3} \varepsilon_{ij}^{pl} \varepsilon_{ij}^{pl}}$$

Deformación desviadora equivalente (usada en la Teoría Total de la Plasticidad):

$$\bar{e} = \sqrt{\frac{2}{3} e_{ij} e_{ij}}$$

3.4. Elasticidad Lineal e Isótropa

Constantes elásticas: $K = \dfrac{E}{3(1-2\upsilon)}$; $G = \dfrac{E}{2(1+\upsilon)}$

Expresión general de la Ley de Hooke en términos de componentes tensoriales: (*izquierda*) tensión en función de la deformación; (*derecha*) deformación en función de la tensión.

$$\sigma_{ij} = 3K\varepsilon^{h}_{ij} + 2Ge_{ij} \quad ; \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{3K}\sigma^{h}_{ij} + \frac{1}{2G}s_{ij} \tag{1}$$

La Ley de Hooke puede expandirse componente a componente:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\upsilon}{E}(\sigma_{22}+\sigma_{33}) \quad (2.1) \quad ; \quad \varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2G} \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E} - \frac{\upsilon}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{33}) \quad (2.2) \quad ; \quad \varepsilon_{23} = \frac{\sigma_{23}}{2G} \quad (2.5)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E} - \frac{\upsilon}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22}) \quad (2.3) \quad ; \quad \varepsilon_{13} = \frac{\sigma_{13}}{2G} \quad (2.6)$$

Las expresiones (2.1 – 2.3) para las componentes normales de deformación pueden sumarse para construir una ecuación constitutiva para la deformación volumétrica:

$$\varepsilon^{\text{vol}} = \frac{1}{K}\overline{\sigma} = \frac{-1}{K}p \tag{3}$$

Obsérvese que la expresión (1.*izq*.) da la tensión en función, separadamente, de la componente hidrostática y de la componente desviadora de la deformación. No da, sin embargo, la tensión en función de la deformación total. Lo mismo puede decirse, en sentido inverso, para la expresión (1.*der*.). Sin embargo, recurriendo a los tensores de proyección hidrostática y proyección desviadora, la Ley de Hooke para materiales elásticos e isótropos (1) puede reescribirse del siguiente modo:

Tensión en función de la deformación:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{ij} = D_{ijkl}\,\varepsilon_{kl} \tag{4.1}$$

Donde: $$\boldsymbol{D} = 3K\,\boldsymbol{J} + 2G\,\boldsymbol{K} \quad \Leftrightarrow \quad D_{ijkl} = 3K\,J_{ijkl} + 2G\,K_{ijkl} \tag{4.2}$$

Deformación en función de la tensión:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\sigma} \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_{ij} = C_{ijkl}\,\sigma_{kl} \tag{5.1}$$

Donde: $$\boldsymbol{C} = \tfrac{1}{3K}\boldsymbol{J} + \tfrac{1}{2G}\boldsymbol{K} \quad \Leftrightarrow \quad C_{ijkl} = \tfrac{1}{3K}\,J_{ijkl} + \tfrac{1}{2G}\,K_{ijkl} \tag{5.2}$$

Definiciones: $\boldsymbol{D}$: tensor (de 4º orden) de ***rigidez*** elástica para materiales isótropos.

$\boldsymbol{C}$: tensor (de 4º orden) de ***flexibilidad*** elástica para materiales isótropos.

Nota: en las definiciones (4.2) y (5.2) de los tensores de rigidez y flexibilidad se han utilizado las tres propiedades descritas en el apartado 1.6.16 para tensores isótropos de 4º orden. En particular, puede identificarse que $\alpha = 3K$, $\beta = 2G$ y que $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{D}^{-1}$.

3.5. Ecuaciones de Hencky para Elasticidad No-Lineal

El modelo constitutivo para elasticidad isótropa definido anteriormente mediante la expresión (1) define una relación *lineal* entre tensión y deformación debido a que las propiedades elásticas K y G son constantes.

Tomando como punto de partida la expresión (1), resulta evidente que es posible construir una relación *no-lineal* entre tensión y deformación si se sustituyen las constantes K y G por otros parámetros que puedan *variar* durante la solicitación mecánica. Esto se muestra en la expresión (6), que es formalmente idéntica a la expresión (1), excepto que en (2) se utilizan K_{sec} y G_{sec} (variables con la solicitación mecánica) en lugar de K y G (constantes).

$$\sigma_{ij} = 3K_{\text{sec}}\varepsilon_{ij}^{h} + 2G_{\text{sec}}e_{ij} \quad ; \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{3K_{\text{sec}}}\sigma_{ij}^{h} + \frac{1}{2G_{\text{sec}}}s_{ij} \tag{6}$$

Observación 1:

Para que la formulación de este modelo constitutivo esté completa, debe definirse el *modo* en que K_{sec} y G_{sec} varían durante la solicitación mecánica mediante leyes de evolución, las cuales deben proporcionar una dependencia de K_{sec} y G_{sec} con el estado tenso-deformacional *actual*. Estas leyes de evolución han de reflejar evidencia empírica. Como mínimo, es exigible que K_{sec} y G_{sec} sean estrictamente positivos y que, además, coincidan con K y G al inicio de la solicitación mecánica (en el estado descargado).

Observación 2:

Este modelo constitutivo para materiales isótropos no sólo es de tipo no-lineal sino que es, además, de tipo *elástico* en el sentido de que necesariamente la deformación desaparece si la tensión se anula, *sin* tener en cuenta la *historia* de la deformación.

Observación 3:

Los parámetros variables K_{sec} y G_{sec} reciben el nombre de "*propiedades elásticas secantes*". Esto es debido al hecho de que ellas permiten relacionar entre sí valores instantáneos o *actuales* de tensión y deformación.

3.6. Teoría de la Plasticidad en Deformaciones Totales

Este modelo constitutivo utiliza como base la expresión (6) para **elasticidad no-lineal isótropa**, complementándolo con las siguientes tres hipótesis adicionales que lo hacen aplicable a metales plásticamente incompresibles, en situaciones en las que no ocurren descargas elásticas intermedias durante una solicitación mecánica:

a) La deformación volumétrica es, toda ella, de naturaleza elástica. Esto se consigue fijando K_{sec} como una *constante* igual al módulo de compresibilidad elástico K en todo instante de una solicitación mecánica y asumiendo para la deformación volumétrica, la ecuación constitutiva elástica derivada de la Ley de Hooke:

$$K_{\text{sec}} = K \qquad ; \qquad \varepsilon^{\text{vol}} = \frac{1}{K}\bar{\sigma} = \frac{-1}{K}p$$

b) El tensor de deformaciones plásticas ε^{pl} no solamente tiene carácter desviador (es decir, $tr\left(\varepsilon^{pl}\right) = 0$) sino que, además, es proporcional al tensor de tensiones desviadoras (esta es la hipótesis de Hencky). El factor de proporcionalidad se denota por ϕ y varía durante una solicitación mecánica:

$$\varepsilon_{ij}^{pl} = \phi\, s_{ij} = e_{ij}^{pl}$$

c) Se admite una descomposición aditiva del tensor de deformaciones desviadoras en sus componentes elástica y plástica $e = e^{el} + e^{pl}$. Así mismo, se asume para la componente elástica de la deformación desviadora e^{el} la ecuación constitutiva elástica derivada de la Ley de Hooke (ver expresión (1)):

$$e_{ij}^{el} = \frac{1}{2G}s_{ij}$$

Como consecuencia de las hipótesis *b*) y *c*) es posible relacionar ϕ y G con el módulo de cortadura secante G_{sec} de la expresión (6). Esto se muestra en la expresión (7):

$$e_{ij} = e_{ij}^{el} + e_{ij}^{pl} = \left(\frac{1}{2G} + \phi\right)s_{ij} = \psi\, s_{ij} = \frac{1}{2G_{\text{sec}}}s_{ij} \tag{7}$$

El modelo se completa siguiendo la observación 1 mencionada en el apartado anterior, definiendo la dependencia entre G_{sec} y el estado tenso-deformacional *actual*. Esto se realiza adoptando el criterio de plastificación de von Mises, en conjunto con una de dos posibles descripciones del proceso de endurecimiento del material: la función H_T, o bien, la función H.

- **Módulo de cortadura secante** en términos de la función de endurecimiento $\boldsymbol{H_T}$:

$$\frac{1}{2G_{\text{sec}}} = \psi \qquad \text{donde} \qquad \psi = \frac{3}{2}\frac{\bar{e}}{q} = \frac{3}{2}\frac{\bar{e}}{H_T(\bar{e})} = \frac{3}{2}\frac{H_T^{-1}(q)}{q} \tag{8}$$

- **Módulo de cortadura secante** en términos de la función de endurecimiento $\boldsymbol{H}$:

$$\frac{1}{2G_{\text{sec}}} = \frac{1}{2G} + \phi \qquad \text{donde} \qquad \phi = \frac{3}{2}\frac{\bar{\varepsilon}_T^{\,p}}{q} = \frac{3}{2}\frac{\bar{\varepsilon}_T^{\,p}}{H\left(\bar{\varepsilon}_T^{\,p}\right)} = \frac{3}{2}\frac{H^{-1}(q)}{q} \tag{9}$$

Finalmente, la formulación completa de la **Teoría de la Plasticidad en Deformaciones Totales** se obtiene combinando la expresión (6) para elasticidad no-lineal con la hipótesis (*a*) para el módulo de compresibilidad y con las leyes de evolución (8) o (9) para el módulo de cortadura secante. Esto se muestra a continuación en las expresiones (10) y (11) que son, como se ha dicho, equivalentes entre sí:

- **Teoría Total de la Plasticidad** en términos de la función de endurecimiento $\boldsymbol{H_T}$:

$$\sigma_{ij} = 3K\varepsilon_{ij}^{h} + \frac{1}{\psi} e_{ij} \qquad ; \qquad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{3K}\sigma_{ij}^{h} + \psi\, s_{ij} \tag{10}$$

$$\text{Donde} \quad \psi = \frac{3}{2}\frac{\bar{e}}{q} = \frac{3}{2}\frac{\bar{e}}{H_T(\bar{e})} = \frac{3}{2}\frac{H_T^{-1}(q)}{q}$$

- **Teoría Total de la Plasticidad** en términos de la función de endurecimiento $\boldsymbol{H}$:

$$\sigma_{ij} = 3K\varepsilon_{ij}^{h} + \left(\frac{1}{2G} + \phi\right)^{-1} e_{ij} \qquad ; \qquad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{3K}\sigma_{ij}^{h} + \left(\frac{1}{2G} + \phi\right) s_{ij} \tag{11}$$

$$\text{Donde} \quad \phi = \frac{3}{2}\frac{\bar{\varepsilon}_T^{\,p}}{q} = \frac{3}{2}\frac{\bar{\varepsilon}_T^{\,p}}{H(\bar{\varepsilon}_T^{\,p})} = \frac{3}{2}\frac{H^{-1}(q)}{q}$$

3.7. Teoría Incremental de la Plasticidad

La ecuación constitutiva incremental (ECI) se explicitará a continuación en una forma que es útil para solicitaciones mecánicas controladas en tensión. Es decir, dado un estado *conocido* de tensiones y deformaciones y dada una variación *prescrita* en el tensor de tensiones, la ECI permitirá calcular el correspondiente incremento en el tensor de deformaciones.

Se omitirá, en cambio, la forma inversa de la ECI, que permite calcular la variación de la tensión asociada a una variación prescrita en el tensor de deformación. La razón de esta omisión es que esta forma inversa, aunque de gran importancia en términos de aplicaciones de ingeniería, es algebraicamente más complicada, escapando del alcance de la asignatura de Mecánica de Sólidos la correspondiente formulación del tensor de rigidez tangente del material elasto-plástico.

Las hipótesis consideradas en la formulación de la ECI son las siguientes: (*a*) *elasticidad lineal* e *isótropa*, (*b*) ecuaciones empíricas de Prandtl y Reuss para la deformación plástica y (*c*) criterio de plastificación de von Mises con endurecimiento isótropo, tanto en la hipótesis de "*strain hardening*" como de "*work hardening*".

ECI expresada en términos de diferenciales infinitesimales:

$$de_{ij} = \frac{1}{2G} ds_{ij} + \frac{3}{2} \frac{dq}{q\, H'} s_{ij} \quad ; \quad d\varepsilon^{\mathrm{vol}} = \frac{-1}{K} dp \quad \text{donde} \quad q = \sigma_{\mathrm{Y}} = H\left(\bar{\varepsilon}^{\,p}\right) \tag{12}$$

$$de_{ij} = \frac{1}{2G} ds_{ij} + \frac{3}{2} \frac{dq}{q^2 F'} s_{ij} \quad ; \quad d\varepsilon^{\mathrm{vol}} = \frac{-1}{K} dp \quad \text{donde} \quad q = \sigma_{\mathrm{Y}} = F\left(W^{p}\right) \tag{13}$$

Forma aproximada de la ECI usando diferencias finitas en lugar de diferenciales infinitesimales:

$$\Delta e_{ij} \approx \frac{1}{2G} \Delta s_{ij} + \frac{3}{2} \frac{\Delta q}{q\, H'} s_{ij} \quad ; \quad \Delta\varepsilon^{\mathrm{vol}} = \frac{-1}{K} \Delta p \quad \text{donde} \quad q = \sigma_{\mathrm{Y}} = H\left(\bar{\varepsilon}^{\,p}\right) \tag{14}$$

$$\Delta e_{ij} \approx \frac{1}{2G} \Delta s_{ij} + \frac{3}{2} \frac{\Delta q}{q^2 F'} s_{ij} \quad ; \quad \Delta\varepsilon^{\mathrm{vol}} = \frac{-1}{K} \Delta p \quad \text{donde} \quad q = \sigma_{\mathrm{Y}} = F\left(W^{p}\right) \tag{15}$$

Observación sobre la forma aproximada de la ECI presentada en (14) y (15):

De considerarse que, en general, una metodología rigurosa debe obtener *incrementos finitos* de una variable mediante integración de incrementos diferenciales de dicha variable. En el caso que nos ocupa, esto se escribe del siguiente modo:

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \Delta\varepsilon_{ij}^{h} + \Delta e_{ij} = \int d\varepsilon_{ij} = \int d\varepsilon_{ij}^{h} + \int de_{ij} = \int d\varepsilon_{ij}^{h} + \int de_{ij}^{el} + \int de_{ij}^{pl} \tag{16}$$

En el caso de la componente *hidrostática* del tensor incremento de deformaciones en (16), la integral puede resolverse en forma *exacta* al considerar que, en metales, todo cambio de volumen es elástico y, por tanto obedece a la Ley de Hooke dada en la expresión (3) del apartado 3.4. Así mismo, también el incremento en la deformación *desviadora elástica* puede calcularse recurriendo a la Ley de Hooke (2.4 a 2.6). Esto es:

$$\Delta\varepsilon_{ij}^{h} = \int d\varepsilon_{ij}^{h} = \frac{1}{3}\left(\int d\varepsilon^{\mathrm{vol}}\right)\delta_{ij} = \frac{\Delta\bar{\sigma}}{3K}\,\delta_{ij} \quad ; \quad \Delta e_{ij}^{el} = \int de_{ij}^{el} = \frac{1}{2G}\Delta s_{ij} \tag{17.1}$$

En el caso de la deformación *desviadora plástica* en (16), que se encuentra definido en (12) o (13), la integración es más compleja y debe resolverse, en la mayoría de los casos, por métodos numéricos. Esta integral es:

$$\Delta e_{ij}^{pl} = \int de_{ij}^{pl} = \int \frac{3}{2}\frac{s_{ij}}{q\,H'} dq \qquad \text{o bien} \qquad \Delta e_{ij}^{pl} = \int de_{ij}^{pl} = \int \frac{3}{2}\frac{s_{ij}}{q^2 F'} dq \tag{17.2}$$

Si se considera que los integrales anteriores comprenden límites de integración entre dos estados (un estado *a* "inicial" y un estado *b* "final"), las formas aproximadas dadas anteriormente en (14) y en (15) están basadas en una integración numérica del siguiente tipo:

Supóngase que la variación de una variable ***y*** entre dos estados se obtiene por integración de una función ***f***; en este caso, la integración exacta de ***f*** puede aproximarse por una *evaluación* de la función en algún punto conveniente de su dominio, ponderada por la longitud del intervalo de integración. Esto se muestra en la expresión (18).

$$\Delta y\Big|_a^b = \int_a^b dy = \int_a^b f(x)dx \approx f(\xi)\Delta x \quad \text{donde} \quad \Delta x = b - a \text{ y donde } \xi \in [a,b] \tag{18}$$

En este esquema de aproximación, es necesario tomar una decisión sobre el valor $\xi \in [a,b]$ en el que es evaluada la función *f*. Si la función es evaluada en $\xi = a$ (esto es, al principio del intervalo), se habla de un esquema de *integración explícita*, mientras que si la función es evaluada en $\xi = b$ se habla de un esquema de *integración implícito*.

Es evidente que la calidad de la aproximación definida en (18) mejora cuanto más pequeña sea la longitud del intervalo de integración Δx. Por otro lado, debe decirse que sólo en determinados casos puede encontrarse un valor óptimo para ξ en términos de precisión y eficiencia de la integración numérica.

Cuando se traslada estas observaciones a la ECI en la versión integrada de las ecuaciones (17.2), la aproximación (18) queda en la forma (19), donde es necesario tomar una decisión sobre si evaluar las variables instantáneas s_{ij} , q y H' al *inicio*, o bien, al *final* del intervalo de integración; esto es, realizar una integración explícita o implícita de las componentes desviadoras de la ECI.

$$\Delta e_{ij}^{pl} = \int de_{ij}^{pl} = \int \frac{3}{2}\frac{s_{ij}}{q\,H'} dq \approx \frac{3}{2}\frac{s_{ij}}{q\,H'}\Delta q \quad \text{o bien} \quad \Delta e_{ij}^{pl} = \int de_{ij}^{pl} = \int \frac{3}{2}\frac{s_{ij}}{q^2 F'} dq \approx \frac{3}{2}\frac{s_{ij}}{q^2 F'}\Delta q \tag{19}$$

Es esta forma (19), que está basada en el método de integración aproximada (18), la que justifica las aproximaciones antes presentadas en (14) y (15).

En la mayoría de los problemas de esta colección en los que se usa la Teoría Incremental es más conveniente, por motivos de sencillez aritmética, realizar la integración en forma explícita evaluando las variables instantáneas al principio del intervalo de integración. La forma implícita de integración es posible, aunque requiere aproximación por iteraciones sucesivas.

3.8. Sobre Líneas de Deslizamiento

Ecuaciones de Hencky:

$p + 2k\varphi = cte$ a lo largo de líneas α

$p - 2k\varphi = cte$ a lo largo de líneas β

En forma equivalente:

$p_B = p_A - 2k(\varphi_B - \varphi_A)$ para líneas α

$p_B = p_A + 2k(\varphi_B - \varphi_A)$ para líneas β

3.9. Algunas Transformadas de Laplace

	Función del tiempo $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\,\overline{f}(s)\,]$	**Transformada de *f*** $\overline{f}(s) = \mathcal{L}[\,f(t)\,]$
Escalón unitario	$f(t) = H(t)$	$\overline{f}(s) = \frac{1}{s}$
Escalón unitario desplazado	$f(t) = H(t-\tau)$	$\overline{f}(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s}$
Dirac	$f(t) = \delta(t)$	$\overline{f}(s) = 1$
Dirac desplazada	$f(t) = \delta(t-\tau)$	$\overline{f}(s) = e^{-\tau s}$
Función identidad (polinomio lineal)	$f(t) = t$	$\overline{f}(s) = \frac{1}{s^2}$
Función potencial	$f(t) = t^n$	$\overline{f}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$
Polinomio de grado ***n***	$f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$	$\overline{f}(s) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k k!}{s^{k+1}}$
Seno	$f(t) = sin(\omega t)$	$\overline{f}(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
Coseno	$f(t) = cos(\omega t)$	$\overline{f}(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$
Evolución exponencial (es decaimiento para α>0)	$f(t) = e^{-\alpha t}$	$\overline{f}(s) = \frac{1}{(\alpha + s)}$
Evolución exponencial (es crecimiento para α>0)	$f(t) = \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha}$	$\overline{f}(s) = \frac{1}{s(\alpha + s)}$
Función con envolvente	$f(t) = g(t)e^{at}$	$\overline{f}(s) = \overline{g}(s-a)$
Función con "escala de tiempo"	$f(t) = g(at)$	$\overline{f}(s) = \frac{1}{a}\,\overline{g}\left(\frac{s}{a}\right)$
Función desplazada en el tiempo	$f(t) = g(t-a)$	$\overline{f}(s) = e^{-as}\,\overline{g}(s)$

Transformada de una derivada: $g(t) = \frac{d^n y}{dt^n}$ $\qquad$ $\overline{g}(s) = s^n \overline{y}(s)$

3.10. Sobre Modelos Viscoelásticos Generalizados e Integrales Heredi-tarias

En el caso de modelos viscoelásticos constituidos por combinaciones serie/paralelo de elementos tipo muelle lineal y tipo amortiguador lineal, el vínculo entre la función de fluencia y el módulo de relajación es el siguiente:

$$\bar{J}(s)\bar{Y}(s) = \frac{1}{s^2}$$

En el caso de solicitaciones mecánicas variables en el tiempo, la ecuación constitutiva debe ser integrada del modo que se indica a continuación:

Para solicitaciones controladas en tensión:

$$\varepsilon(t) = \sigma(0)\, J(t) + \int_0^t \left.\frac{d\sigma}{dt}\right|_{t'} J(t-t')\, dt'$$

$$\varepsilon(t) = \sigma(t)\, J(0) + \int_0^t \sigma(t') \left.\frac{dJ}{dt}\right|_{t-t'} dt'$$

Para solicitaciones controladas en deformación:

$$\sigma(t) = \varepsilon(0)\, Y(t) + \int_0^t \left.\frac{d\varepsilon}{dt}\right|_{t'} Y(t-t')\, dt'$$

$$\sigma(t) = \varepsilon(t)\, Y(0) + \int_0^t \varepsilon(t') \left.\frac{dY}{dt}\right|_{t-t'} dt'$$

Página intencionalmente en blanco

TEMA 1 – INTRODUCCIÓN

Parte A.- Ejercicios de repaso de conceptos básicos

Ejercicio 1.1

Deducir las expresiones que relacionan la tensión y deformación *verdaderas* con la tensión y deformación *ingenieriles* obtenidas en un ensayo de tracción, suponiendo conservación de volumen.

Ejercicio 1.2

Considerando dos procesos consecutivos de tracción sobre una pieza prismática de longitud inicial L_0, demostrar que la deformación verdadera es aditiva, pero la ingenieril no lo es.

Ejercicio 1.3*

Deducir la expresión que permite obtener el parámetro "resistencia a la tracción" a partir de un registro de **tensión verdadera/deformación verdadera**, obtenido de un ensayo de tracción.

Ejercicio 1.4*

Un material tiene una curva tensión-deformación dada por $\sigma = 450\varepsilon^{0.25}$. Calcular la resistencia a tracción simple del material.

Parte B.- Problemas básicos sobre Plasticidad uni-dimensional

Ejercicio 1.5

La estructura de la *figura 1.1* está compuesta por una barra rígida AD articulada en A y por dos cables BE y CF de 20 mm^2 de sección transversal. El material del que están hechos los cables obedece a una ley tensión-deformación dada por $\sigma=900\varepsilon^{0.1}$ (MPa). Se pide calcular el valor máximo que puede alcanzar la masa M.

Ejercicio 1.6

Una estructura constituida por dos barras articuladas en A, B y C soporta una carga vertical P en C, tal como se indica en la *figura 1.2*. Las barras son idénticas de sección A_0 y el material de las mismas obedece a una ley tensión-deformación dada por $\sigma=K\varepsilon^n$. Encontrar el valor máximo de la carga P que puede soportar la estructura.

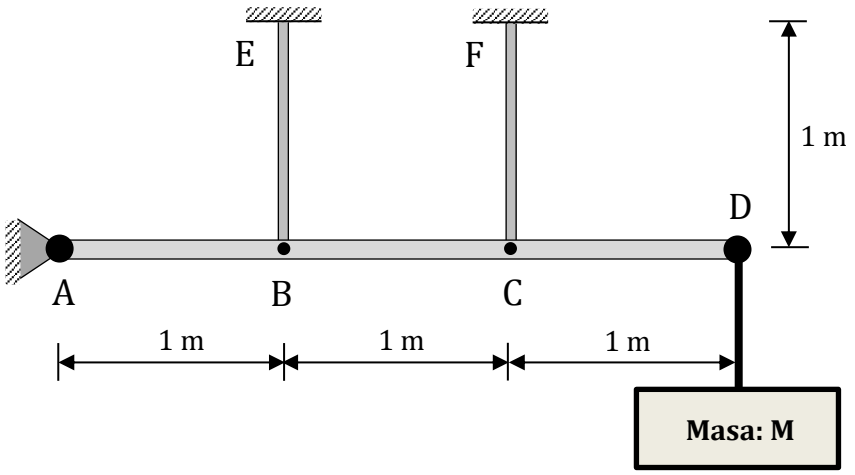


Figura 1.1. Estructura asociada al ejercicio 1.5

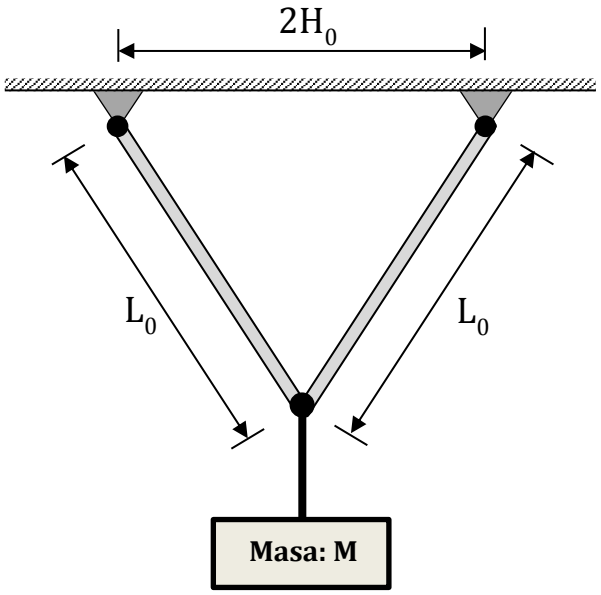


Figura 1.2. Estructura asociada al ejercicio 1.6

Ejercicio 1.7

En la *figura 1.3* se muestra una estructura estáticamente indeterminada que consiste en un tubo, dentro del cual se dispone concéntricamente una barra. En el extremo superior, los dos están unidos a un empotramiento y el inferior a una placa rígida. Sobre esta placa se aplica una fuerza P hasta producir una deformación longitudinal en ambos sólidos de valor $\varepsilon=3\sigma_0/E$; una vez alcanzada esta deformación, la fuerza se retira.

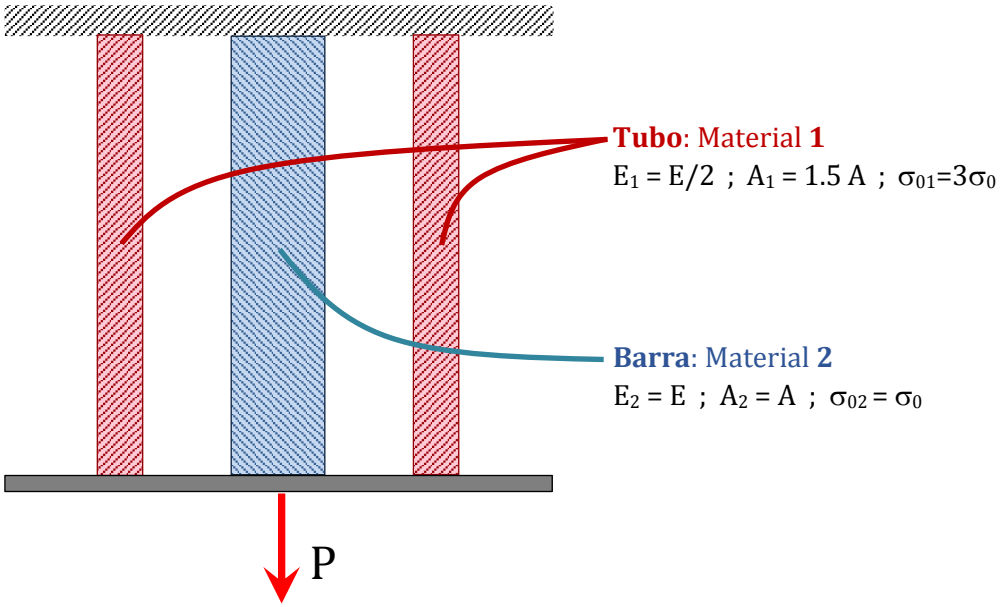


Figura 1.3. Estructura asociada al ejercicio 1.7

Asumiendo que ambos sólidos están fabricados por dos materiales distintos cuyo comportamiento puede representarse mediante un modelo elástico-perfectamente plástico, se pide:

a) Carga para plastificación inicial y total

b) Carga para $\varepsilon=3\sigma_0/E$

c) Deformación residual conjunta

d) Tensiones residuales en ambos sólidos.

NOTA: No considerar las variaciones de sección debidas a la deformación.

P

Ejercicio 1.8

Un anillo como el de la figura 1.4, de radio inicial $\mathbf{R_0}$ y espesor $\boldsymbol{e}$ (con $\boldsymbol{e} <<< \mathbf{R_0}$), gira a una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}$. Está fabricado de un material de densidad $\boldsymbol{\rho}$, con módulo de elasticidad $\mathbf{E}$ y límite elástico $\boldsymbol{\sigma_Y}$. Calcular, en función de los parámetros del problema:

a) La velocidad angular $\boldsymbol{\omega^*}$ que produce la plastificación del anillo.

b) El radio del anillo en ese instante.

Nota: No considerar la variación de dimensiones del aro para el cálculo de la tensión.

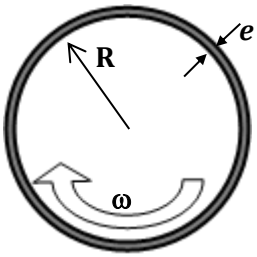


Figura 1.4. Anillo del ejercicio 1.8

Ejercicio 1.9

Una estructura está compuesta por tres barras articuladas unidas en un mismo punto, como se muestra en la *figura 1.5 (izquierda)*.

Las barras tienen secciones $\mathbf{A_{AD} = A_{CD} = A}$ y $\mathbf{A_{BD} = 0.8 \cdot A}$, que pueden considerarse constantes para el cálculo de tensiones. Las tres pueden considerarse del mismo material en cuanto a sus propiedades elásticas (que son **E**, **ν**) y a su límite elástico inicial (que es σ_Y).

Sin embargo, la barra **BD** puede considerarse *elástica perfectamente plástica*, mientras que las barras **AD** y **CD**, en cambio, experimentan endurecimiento por deformación de acuerdo a una ley bilineal, con una pendiente de **T** en la zona plástica, como se muestra en la *figura 1.5 (derecha)*.

En el punto **D** se impone un desplazamiento vertical hacia abajo de valor δ.

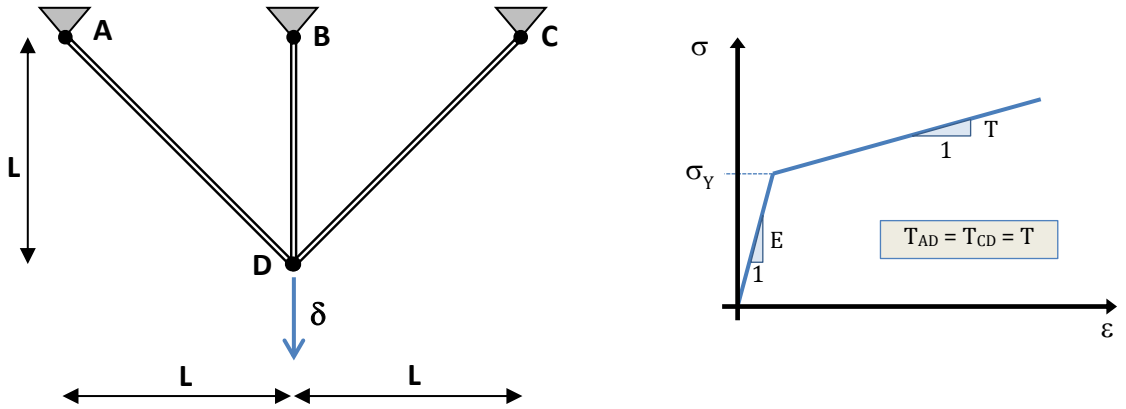


Figura 1.5. *Izquierda*: estructura asociada al ejercicio 1.9.
Derecha: curva tensión-deformación del material de las barras AD y CD

Se pide:

a) Indique cuál es la barra de la estructura que plastifica antes. Obtenga, además, el valor δ* con el que comienza a plastificar la estructura.

b) Obtenga el valor δ** que produce la plastificación completa en la estructura. Calcular la tensión y deformación de cada barra y la fuerza vertical **F**** que es necesario aplicar en D para producirlo.

c) Obtener las tensiones y deformaciones de cada barra para δ = 1.5 δ**.

Ejercicio 1.10*

Un carrito se encuentra sujeto mediante dos barras metálicas con comportamiento elasto-plástico, articuladas en sus extremos. El carro puede deslizar sin fricción en una guía vertical.

Sobre el carrito se impone un desplazamiento vertical, hacia abajo, ***u***, de forma progresivamente creciente desde ***u* = 0** hasta ***u* = 2** mm. Como resultado de este desplazamiento, las barras sufren una elongación y quedan sometidas a esfuerzo axil, tal como se representa esquemáticamente en la *figura 1.6*. Las propiedades geométricas y mecánicas de cada barra se muestran en la *tabla 1*.

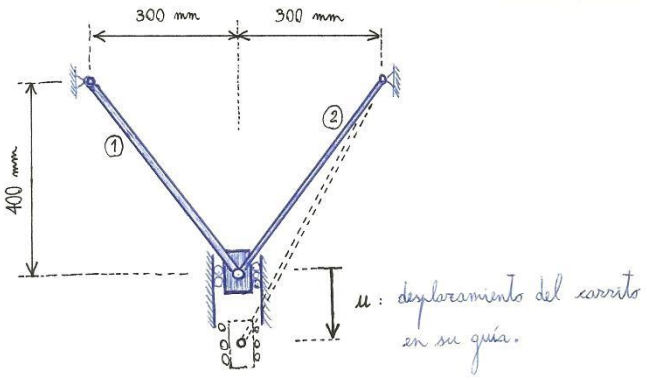


Figura 1.6. Dos barras articuladas, conectadas a un carrito deslizante.

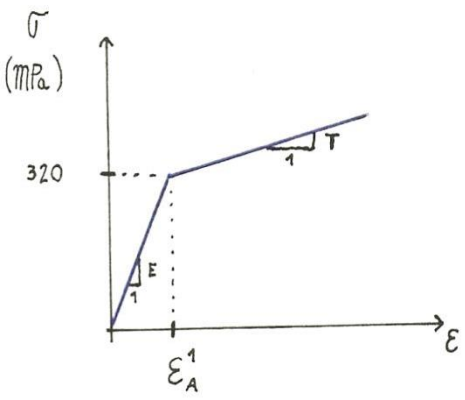
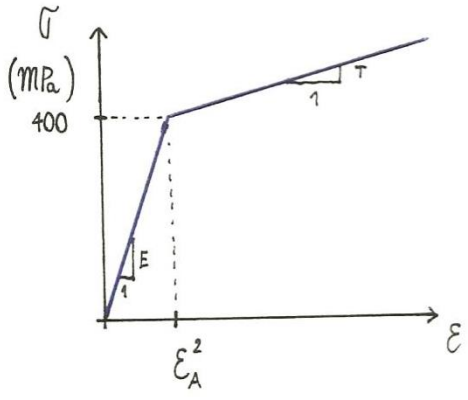
	Barra 1	**Barra 2**
Sección transversal	$A_1 = 150$ mm^2	$A_2 = 100$ mm^2
Curva tensión-deformación medida en ensayo de tracción uniaxial		
Módulos E y T	E =200000 MPa T = 80000 MPa	E =200000 MPa T = 80000 MPa

Tabla 1 Las propiedades geométricas y mecánicas de cada barra.

Responda a las siguientes cuestiones:

a) Obtener los valores de las deformaciones $\varepsilon_{\mathrm{A}}^{1}$ y $\varepsilon_{\mathrm{A}}^{2}$ en el instante de plastificación inicial de cada barra.

b) Obtener la función ***ε = ε (u)*** que proporciona la ***deformación ingenieril*** en cada barra, en función del desplazamiento impuesto ***u***.

c) Calcular los valores faltantes en la *figura 1.7*, que representa en forma aproximada el esfuerzo axil en cada barra en función del desplazamiento ***u*** del carrito. Específicamente, obtenga las seis cantidades indicadas en la *tabla 2*.

Indicaciones:

- Considere en todos los cálculos, por simplicidad, deformación ingenieril en lugar de verdadera.
- Considere que la sección transversal de las barras no sufre cambios durante la deformación.
- Considere al menos 4 cifras significativas en las deformaciones del punto (*a*)

	Barra 1	**Barra 2**
Desplazamiento ***u*** en el instante de plastificación inicial de la barra ***i*** (con ***i*** = 1,2)	u_{A}^{1} [mm]	u_{A}^{2} [mm]
Esfuerzo Axil en el instante de plastificación inicial de la barra ***i*** (con ***i*** = 1,2)	P_{A}^{1} [kN]	P_{A}^{2} [kN]
Esfuerzo Axil en la barra ***i*** en el instante en que el desplazamiento del carrito es ***u*** = **2** mm.	P_{B}^{1} [kN]	P_{B}^{2} [kN]

Tabla 2 Incógnitas a resolver en el apartado (*c*).

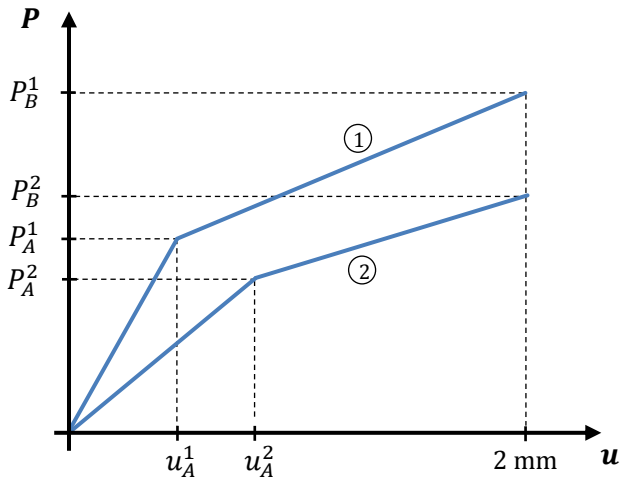


Figura 1.7. Esfuerzo axil en cada barra, en función del desplazamiento **u**.

Ejercicio 1.11

Dos barras rígidas de longitud **L** y definidas por los segmentos **AC** y **CE**, se conectan entre sí mediante la unión articulada situada en **C**. Un cable metálico conecta los puntos **B** y **D** de cada barra, recorriendo los tramos ***a***, ***b***, ***c***, ***d*** y ***e***, a través de cuatro poleas sin fricción, como se indica en la figura 1.8.

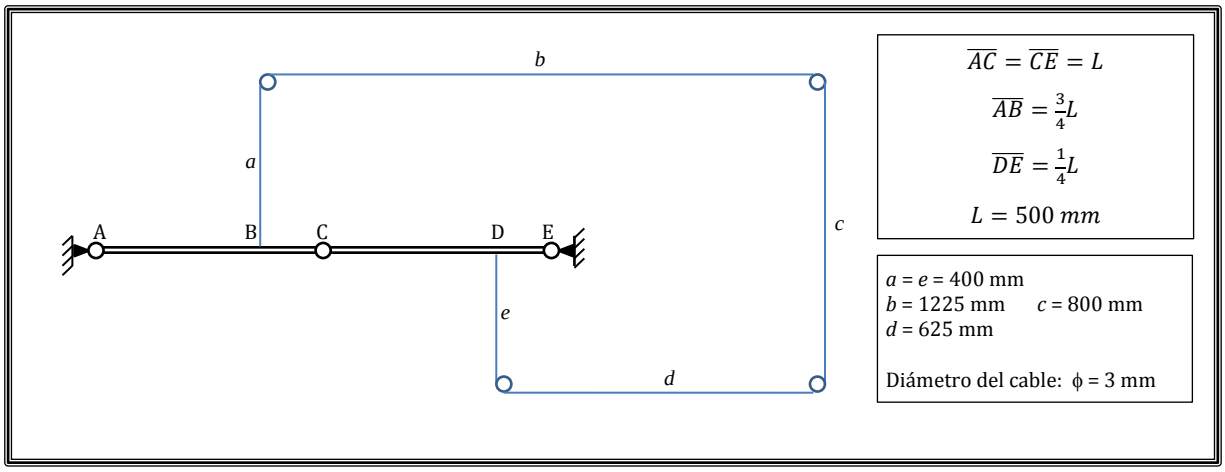


Figura 1.8. Configuración geométrica inicial

Debido a la acción de una fuerza **P**, creciente progresivamente en el tiempo, se producen pequeños desplazamientos, de modo que la rótula **C** se desplaza verticalmente hasta **C'** una distancia δ, a la vez que los puntos de conexión del cable a las barras, **B** y **D**, se desplazan hasta los puntos **B'** y **D'**, recorriendo las distancias δ_1 y δ_2, respectivamente (tal como se indica en la figura 1.9).

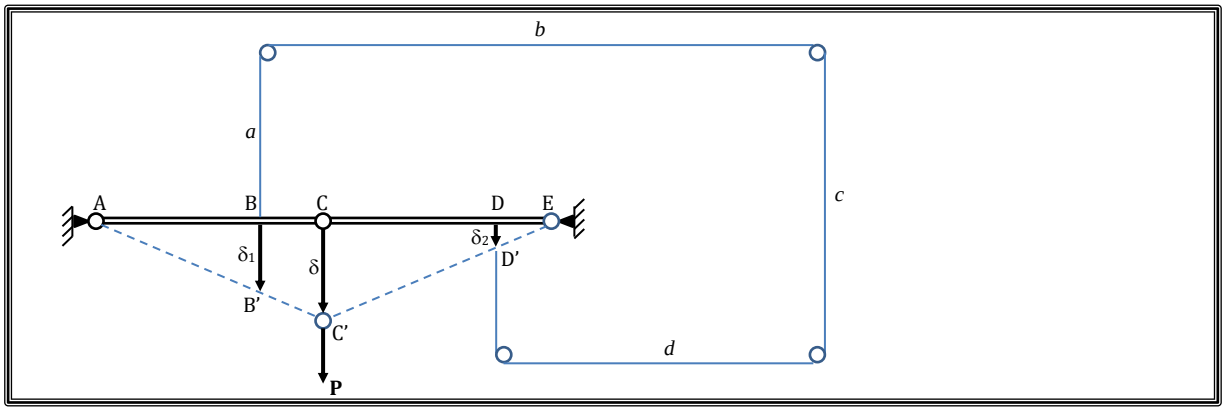


Figura 1.9 – Efecto de la carga **P**: **B**,**C** y **D** se mueven hasta **B'**, **C'** y **D'**, respectivamente.

El material del cable presenta comportamiento elasto-plástico con endurecimiento por deformación plástica. Sus propiedades elásticas, así como su curva tensión-deformación, se midieron en un ensayo de tracción uni-axial, mostrándose los resultados en la figura 1.10.

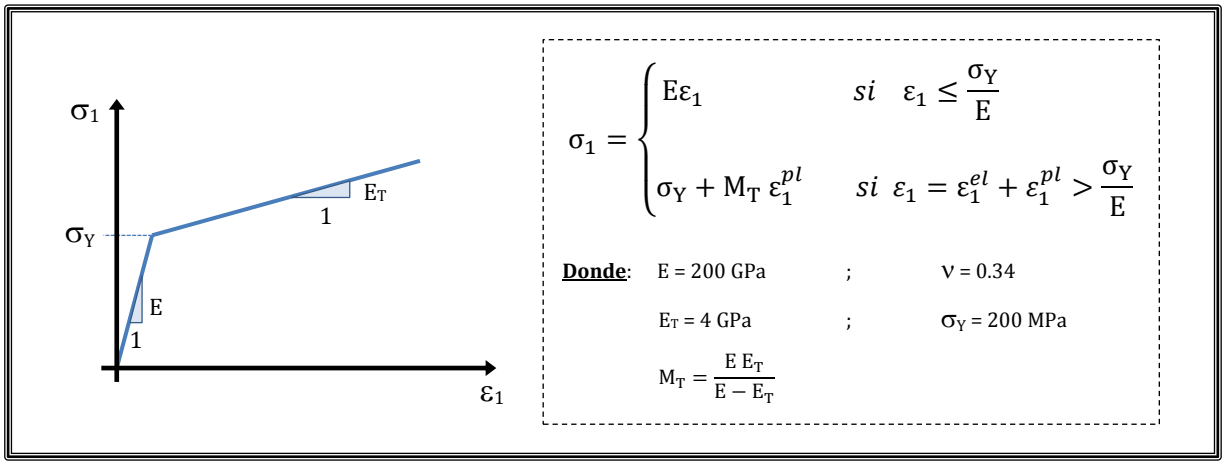


Figura 1.10 – Propiedades mecánicas del material del cable.

Se pide:

a. Obtener la deformación unitaria del cable, en función del desplazamiento δ que experimenta el punto **C**. Verifique además, recurriendo a los datos geométricos del problema, que para todo $\delta > 0$, el cable está en tracción.

b. Estimar la variación que sufre el área de la sección transversal del cable, en la deformación hasta el instante en que el cable comienza a plastificar.

c. Obtener el valor de la fuerza externa $\mathbf{P_f}$, en el instante en que el cable comienza a plastificar.

d. Obtener el valor del desplazamiento δ que experimenta el punto **C**, cuando la fuerza aumenta en 10% con respecto al valor de plastificación inicial (nota: realice la ***aproximación*** que el área de la sección transversal del cable se mantiene constante en este régimen de deformación plástica)

Recuerdo: $\frac{\Delta V}{V_0} \approx \varepsilon^{vol} = \frac{-p}{K}$; $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$

TEMA 2 – ECUACIONES DE LA MECÁNICA DE SÓLIDOS

Problemas sobre Cinemática del Sólido Deformable

Ejercicio 2.1*

Considere las siguientes ecuaciones del movimiento:

$$\vec{x} = \vec{x}\left(\vec{X},t\right) = \begin{cases} x = X - Yt \\ y = Xt + Y \\ z = -Xt + Z \end{cases}$$

Adicionalmente, se conoce la descripción ***material*** de la evolución de la ***densidad*** del material:

$$\rho = \overline{\rho}(X,Y,Z,t) = \rho_0 + \frac{X+Y+Z}{1+t^2} \qquad \text{con} \quad \rho_0 = cte$$

Indique si las ecuaciones de movimiento definen un movimiento físicamente posible, en cuyo caso, obtenga la descripción ***espacial*** de la evolución densidad del material.

Ejercicio 2.2

Sea Ω_0 el cilindro de longitud inicial L_0 y radio R que se muestra en la *figura 2.1*. Determine si la función φ, que proporciona las ecuaciones del movimiento *directas*, tiene inversa, en cuyo caso, determine además las ecuaciones de movimiento *inversas*.

$$\vec{x} = \varphi\left(\vec{X},t\right) = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 + \frac{1}{2}at^2 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix}$$

$\forall\, X_1 \in [0, L_0]$ y $X_2^2 + X_3^2 \leq R^2$

con a = cte. y $t \geq 0$

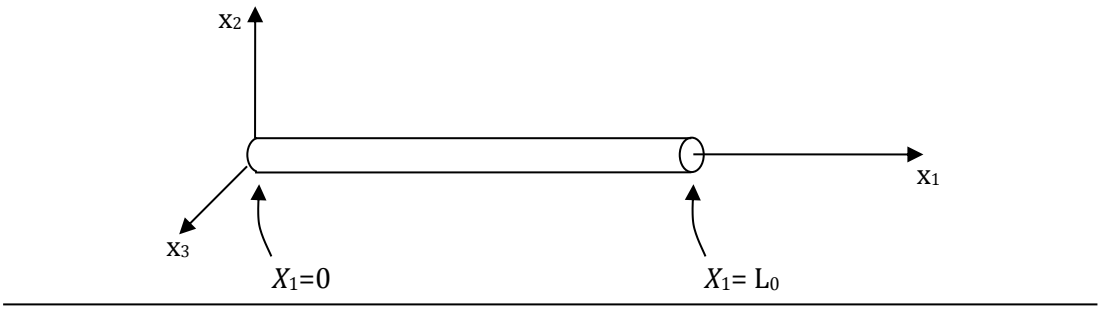


Figura 2.1.

Cuestiones:

- ¿Define φ un movimiento físicamente posible?
- En caso afirmativo, ¿qué representa el parámetro a?
- Indique si el cilindro está sometido sólo a traslación o, por el contrario, a la superposición de un movimiento de traslación y una deformación.

Ejercicio 2.3

Supóngase que en el ejercicio anterior, el término a en la función φ no es constante, sino que presenta una distribución lineal entre $a = a_1$ para $X_1 = 0$ y $a = a_2$ para $X_1 = L_0$, del siguiente modo:

$$a = a(X_1) = \left(1 - \frac{X_1}{L_0}\right) a_1 + \frac{X_1}{L_0} a_2 \qquad \text{con} \qquad a_1 \, , \, a_2 = ctes.$$

En estas condiciones, la ecuación del movimiento es:

$$\vec{x} = \varphi(\vec{X}, t) = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 + \frac{1}{2} a(X_1) t^2 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} \qquad \forall \, X_1 \in [0, L_0] \;\; \text{y} \;\; X_2^2 + X_3^2 \leq R^2 \;\text{y}\; t \geq 0$$

Cuestiones:

- ¿Bajo qué condiciones describe φ un movimiento físicamente posible?
- Determine si el cilindro está sometido sólo a traslación o, por el contrario, a la superposición de un movimiento de traslación y una deformación. En este último caso, obtenga el cambio de longitud y de volumen del cilindro en función del tiempo.
- Suponiendo que $\boldsymbol{a_2 > a_1 > 0}$, obtenga una ***descripción material*** de la evolución de la deformación axial ε_x de la barra. Obtenga también la correspondiente ***descripción espacial*** de la evolución de dicha deformación.

Ejercicio 2.4

Supóngase ahora que el término a en la función φ presenta una dependencia *cuadrática* de la posición X_1, con $a = a_1$ para $X_1 = 0$ y $a = a_2$ para $X_1 = L_0$, del siguiente modo:

$$a = a(X_1) = \left(1 - \left[\frac{X_1}{L_0}\right]^2\right) a_1 + \left[\frac{X_1}{L_0}\right]^2 a_2 \qquad \text{con} \qquad a_1 \, , \, a_2 = ctes.$$

En estas condiciones, la ecuación del movimiento es:

$$\vec{x} = \varphi(\vec{X}, t) = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 + \frac{1}{2} a(X_1) t^2 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} \qquad \forall \, X_1 \in [0, L_0] \;\; \text{y} \;\; X_2^2 + X_3^2 \leq R^2 \;\text{y}\; t \geq 0$$

Cuestiones:

- ¿Bajo qué condiciones describe φ un movimiento físicamente posible?
- Para el caso en que $\boldsymbol{a_2 > a_1 > 0}$, muestre la diferencia entre la ***descripción material*** y la ***descripción espacial*** de evolución de la deformación axial ε_x de la barra.

Ejercicio 2.5

Compare las ventajas y desventajas del tensor de deformaciones de Green-Lagrange $\boldsymbol{E}$ y del tensor de "deformaciones infinitesimales" $\boldsymbol{\varepsilon}$.

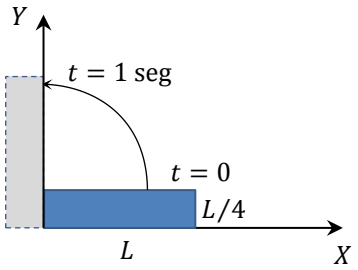
Para ello, obtenga el "*stretch*" y la "*deformación unitaria*" a partir de los tensores $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{\varepsilon}$ en cada una de las siguientes tres situaciones de movimiento de una placa de longitud inicial L, altura $L/4$ y espesor c.

En cada caso, evalúe λ_x y ε_x en una posición de interés (por ejemplo, $X = 0{,}25L$), e interprete, además, el significado de las componentes escalares de $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{\varepsilon}$.

A la vista de los tres resultados, responda: ¿Qué aspecto del movimiento y la deformación no puede ser representado adecuadamente por el tensor de deformaciones infinitesimales?

Caso 1: Movimiento de sólido rígido incluyendo traslación y rotación:

$$\begin{cases} x = X\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - Y\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\ y = X\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + Y\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\ z = Z \end{cases}$$

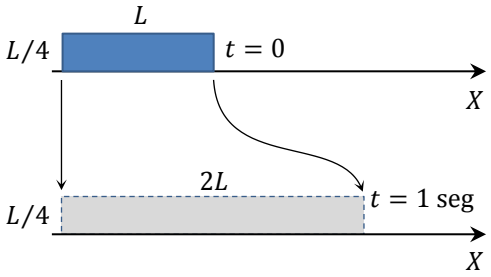


en el dominio:
$$\begin{cases} 0 < X < L \\ 0 < Y < L/4 \\ 0 < Z < c \\ 0 \le t \le 1 \text{ seg} \end{cases}$$

Nota: este caso incluye "gran desplazamiento" y "gran rotación", por lo que ***no*** se cumplen las condiciones de validez de "la teoría de deformaciones infinitesimales" (ellas están expresadas en las diapositivas 41 – 43 del Tema 2). Aun así, nos interesa comparar las predicciones de los tensores $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{\varepsilon}$ en esta situación.

Caso 2: Movimiento de **1-D** de traslación y elongación pura:

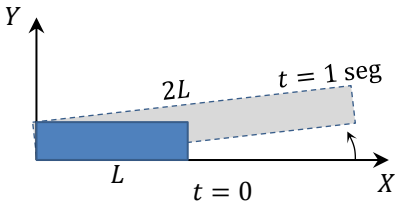
$$\begin{cases} x = X + \left(\frac{X}{L}\right)^2 v\,t \\ y = Y \\ z = Z \end{cases} \quad \text{para} \quad \begin{cases} 0 < X < L \\ 0 < Y < L/4 \\ 0 < Z < c \\ v = L\ [mm/seg] \\ 0 \le t \le 1 \text{ seg} \end{cases}$$



Nota: este caso incluye "gran desplazamiento", "gradientes de desplazamiento comparables a la unidad", pero "cero rotación", por lo que ***tampoco*** se cumplen las condiciones de validez de "la teoría de deformaciones infinitesimales".

<u>Caso 3</u>: Movimiento combinado que incluye <u>gran elongación</u> pero <u>muy pequeña rotación</u>:

$$\begin{cases} x = \left\{ X + \left(\frac{X}{L}\right)^2 v\, t \right\} \cos\left(\frac{\pi}{100} t\right) - Y \sin\left(\frac{\pi}{100} t\right) \\ y = \left\{ X + \left(\frac{X}{L}\right)^2 v\, t \right\} \sin\left(\frac{\pi}{100} t\right) + Y \cos\left(\frac{\pi}{100} t\right) \\ z = Z \end{cases}$$



$$\text{para} \quad \begin{cases} 0 < X < L \\ 0 < Y < L/4 \\ 0 < Z < c \\ v = L\ [mm/seg] \\ 0 \le t \le 1\ \text{seg} \end{cases}$$

<u>Nota</u>: este caso incluye "gran desplazamiento", "gradientes de desplazamiento comparables a la unidad", pero "pequeña rotación", por lo que ***<u>tampoco</u>*** se cumplen las condiciones de validez de "la teoría de deformaciones infinitesimales".

Se recuerda las siguientes expresiones:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right\} \quad ; \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right\}$$

$$e_N = \lambda_N - 1 = \sqrt{1 + 2\vec{N} \cdot \boldsymbol{E} \cdot \vec{N}} - 1$$

$$e_N = \lambda_N - 1 \approx \vec{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{N}$$

TEMA 3 – INTRODUCCIÓN A PLASTICIDAD

Parte A.- Ejercicios sobre Criterios de Plastificación

Ejercicio 3.1

El estado tensional en una placa de cubierta está dado por las expresiones,

$$\sigma_x = 1250\,p \qquad \sigma_y = 2800\,p \qquad \sigma_z = (\sigma_x + \sigma_y)/2$$
$$\tau_{xy} = 500\,p \qquad \tau_{yz} = 0 \qquad \tau_{xz} = 0$$

donde $\boldsymbol{p}$ es la carga que soporta la cubierta por unidad de superficie.

Encontrar el valor de la carga $\boldsymbol{p}^*$ que produce la plastificación de la cubierta, si el material tiene una tensión de fluencia de $\boldsymbol{\sigma_0}$ = 240 N/mm^2.

a) Según el criterio de Von Mises.
b) Según el criterio de Tresca.

Ejercicio 3.2

En un punto de un sólido fabricado en un material metálico, el estado tensional viene dado, en ejes **{x,y,z}**, por el siguiente tensor de tensiones:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} MPa$$

Se pide:

a) Obtener las tensiones y direcciones principales.
b) Obtener los **invariantes genéricos** del tensor de tensiones, $\mathbf{I_1}$, $\mathbf{I_2}$.
c) Obtener los tensores de tensiones desviador e hidrostático.
d) Obtener los **invariantes genéricos** del tensor de tensiones desviador, $\mathbf{J_1}$ y $\mathbf{J_2}$.
e) Sabiendo que el material metálico plastifica cuando la distancia desde la proyección del estado tensional en ejes $\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$ sobre el plano desviador al origen de este sistema es mayor o igual a 6 MPa, comprobar que, si al estado tensional anterior, se le superpone un estado hidrostático de tensiones, la situación sigue siendo la misma.

Ejercicio 3.3

Un punto de un sólido está sometido al estado de tensiones (tensión uniaxial + cortante puro):

$$\sigma_x = \boldsymbol{\sigma} \qquad \sigma_y = 0 \qquad \sigma_z = 0$$
$$\tau_{xy} = \boldsymbol{\tau} \qquad \tau_{yz} = 0 \qquad \tau_{xz} = 0$$

Aplicando los criterios de plastificación de Tresca y Von Mises, determinar la relación entre los valores de $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\tau}$ que producen la plastificación en el punto, si se ajustan ambos criterios para el límite elástico del material $\boldsymbol{\sigma_0}$.

Ejercicio 3.4*

Un cilindro hueco de diámetro interior $\boldsymbol{D}$ y de espesor $\boldsymbol{t}$ ($\boldsymbol{t}$ muy pequeño respecto a $\boldsymbol{D}$) es sometido a un estado tensional con el sistema accionado con gas que se muestra en la figura, en el que $\boldsymbol{P}$ es la presión interior del gas y $\boldsymbol{A_0}$ es el área de la placa superior (supóngase despreciable la sección del hueco que comunica ambas partes). Se pide:

a) Plantear razonadamente el estado tensional del cilindro.
b) Describir el proceso de plastificación del material.
c) Siguiendo el criterio de Tresca, calcular en función de $\lambda = A_0/A$ (con $A = \pi D^2/4$) la presión $\boldsymbol{P^*}$ con la que plastificará el cilindro.

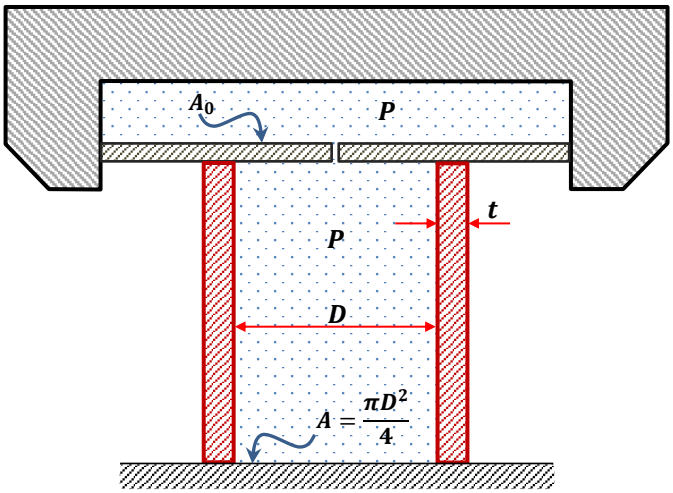


Figura 3.1. Estructura asociada al ejercicio 3.4

Ejercicio 3.5

Una probeta cilíndrica de radio inicial **R** y longitud inicial **L** de un material elástico se encuentra confinada lateralmente y sometida a una tensión de compresión de valor σ. Considérese al confinamiento infinitamente rígido, y tómese σ_Y como límite elástico del material medido en tensión uniaxial, **E** como el módulo de elasticidad y $\boldsymbol{\nu}$ como el coeficiente de Poisson.

Se pide:

a) Obtener los tensores de tensiones y deformaciones en régimen elástico.
b) Obtener la fuerza axial **F** aplicada sobre la probeta en régimen elástico.
c) Obtener la variación de longitud **ΔL** que sufre la probeta en régimen elástico.
d) Obtener el valor de σ que produce la plastificación del material, según el criterio de Von Mises y de Tresca.

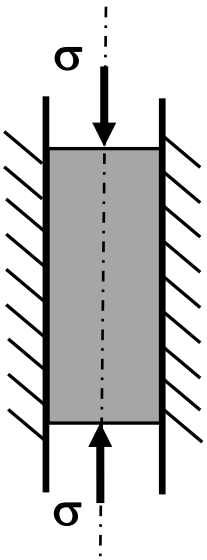


Figura 3.2. Estructura asociada al ejercicio 3.5

Ejercicio 3.6

Un punto de un material polimérico está sometido al estado de tensiones siguiente:

$$\sigma_{ij} = \sigma \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1/2 & -1/4 \\ 0 & -1/4 & 0 \end{bmatrix}, \ \sigma > 0$$

Considérese la siguiente Función de Plastificación:

$$f \equiv \psi \cdot \left(\frac{\sqrt{3|J_2|}}{\sigma_0} \right)^2 + (m-1) \cdot \left(\frac{I_1}{\sigma_0} \right) - m \qquad \text{donde} \qquad \psi = \frac{8}{7} \left(1 - \frac{27}{32} \frac{J_3^2}{|J_2|^3} \right)$$

Se sabe que para el material considerado:

$$\sigma_0 = 100\, MPa$$
$$m = 1.2$$

Se pide determinar el valor de **σ** que produce la plastificación del material en el punto considerado, según el criterio de plastificación dado por $f = 0$.

Parte B.- Ejercicios sobre Endurecimiento por Deformación Plástica

Ejercicio 3.7*

Las siguientes expresiones analíticas pueden ser utilizadas como "leyes empíricas" para caracterizar ***curvas de endurecimiento*** de distintos metales. Sus distintos parámetros deben ser obtenidos a partir de ensayos experimentales, tales como aquellos mencionados en el Tema 4 (tensión, compresión o torsión).

Ley de endurecimiento	Expresión σ - ε	Parámetros (propiedad del material)
Ley de Hollomon:	$\sigma = K\left(\varepsilon^{pl}\right)^n$	$K, n \qquad 0 \leq n \leq 1$
Ley de Lüdwick:	$\sigma = A + K\left(\varepsilon^{pl}\right)^n$	$A, K, n \qquad 0 \leq n \leq 1$
Ley de Ramberg-Osgood:	$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha\left(\frac{\sigma}{\sigma_t}\right)^n$	$\alpha, \sigma_t, n \qquad 1 \leq n$

Para cada una de estas leyes:

- Obtenga las funciones de endurecimiento en las formas canónicas $\sigma_Y = H(\bar{\varepsilon}^p)$ y $\sigma_Y = F(W^p)$, que dan el límite elástico actual σ_Y en función, respectivamente, de la deformación plástica equivalente y del trabajo plástico acumulado.
- Obtenga el valor de las derivadas $H'(\bar{\varepsilon}^p)$ y $F'(W^p)$ justo en el instante inicial de plastificación, es decir, cuando $\bar{\varepsilon}^p = 0$ y $W^p = 0$.
- Explique qué influencia tiene el parámetro ***n*** en las curvas de endurecimiento que representan estos tres modelos. En cada uno de estos modelos, ¿qué valor de ***n*** corresponde a *plasticidad perfecta*?

Finalmente, indique cuál (o cuáles) de estos modelos representa un límite elástico *inicial bien definido*, y cuál (o cuáles) predicen el surgimiento de deformación plástica incluso para valores *pequeños* de tensión.

Ejercicio 3.8

Una probeta de un material metálico ha sido sometida a un ensayo de tracción uniaxial, obteniéndose una relación tensión verdadera-deformación verdadera que puede ajustarse mediante una función bilineal, como se muestra en la *figura 3.3*. La rama elástica viene caracterizada por un módulo de elasticidad **E = 60 GPa**. La rama elasto-plástica comienza para un valor de tensión $\boldsymbol{\sigma_Y}$ **= 80 MPa** y tiene una pendiente **T = 80 MPa**.

Obtener, para el material ensayado, las funciones de endurecimiento ***H*** y ***F***, que describen el límite elástico, y sus correspondientes derivadas ***H'*** y ***F'***:

a) $\sigma_Y = H\left(\bar{\varepsilon}^p\right)$

b) $\sigma_Y = F\left(W_p\right)$

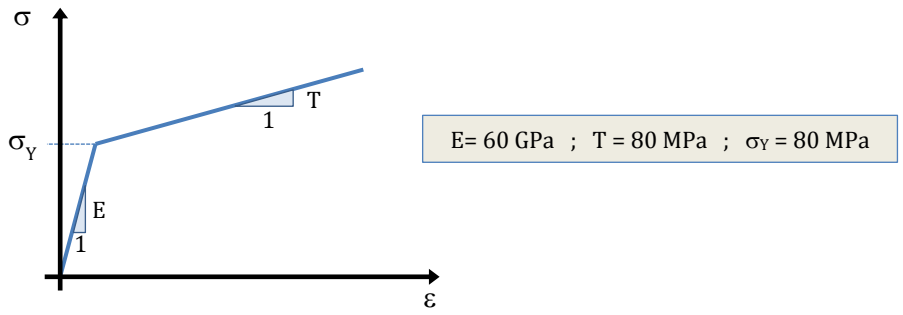


Figura 3.3. Curva de tensión-deformación del material del ejercicio 3.8

Ejercicio 3.9*

Un material metálico tiene módulo de elasticidad **E** y coeficiente de Poisson **ν**. Considérese la siguiente función de endurecimiento obtenida en un ensayo de tracción simple:

$$\sigma_Y = \sigma_{Y0} + A\bar{\varepsilon}^p$$

Obtener la curva **τ-γ** que se obtendría si se realizara un ensayo de cortadura pura.

Ejercicio 3.10

Se tiene un acero de dureza natural en barras de 24 *mm* de diámetro, cuya curva tensión-deformación obtenida de un ensayo de tracción se puede aproximar por una recta, como se muestra en la *figura 3.4*.

Se pretende con este acero obtener un acero deformado en frío con tensión de fluencia de 420 *MPa*, para lo cual se somete a **tracción** y **torsión combinadas**. Si la tensión de tracción a que se somete es constante, de valor 220 *MPa*, estimar el **giro por unidad** de longitud que deberá aplicarse para obtener las características requeridas.

Utilizar dos métodos:

- Uno basado en la hipótesis de Hencky: $e_{ij} = \psi s_{ij}$
- Otro basado en las hipótesis de Prandtl y Reuss: $d\varepsilon_{ij}^{pl} = d\lambda\, s_{ij}$

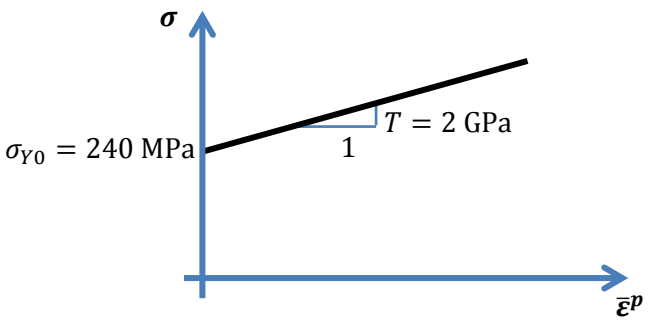


Figura 3.4. Curva de endurecimiento asociada al ejercicio 3.10

Parte C.- Ejercicios sobre Teoría Incremental y Teoría Total de la Plasticidad

Ejercicio 3.11

En un punto de un sólido se tiene el tensor de tensiones es el siguiente:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 65 & 0 & 80 \\ 0 & -225 & 0 \\ 80 & 0 & 100 \end{bmatrix} MPa$$

A partir de este instante, se impone el siguiente ***incremento*** en el tensor de deformaciones y de deformación plástica equivalente:

$$d\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 7 & -10 & 4 \\ -10 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} = d\varepsilon_{ij}^{el} + d\varepsilon_{ij}^{pl}$$

Supóngase, además, que el incremento en *deformación plástica equivalente* que está asociado al tensor incremento de deformación plástica es conocido y vale $d\bar{\varepsilon}^{p} = 0.000025$

Obtener el tensor incremento de tensión, $d\sigma_{ij}$, que está asociado al incremento total $d\varepsilon_{ij}$.

Datos: Las propiedades elásticas del material son **E=200GPa** , **ν=0.33** , y su ley de endurecimiento sigue la expresión de Ramberg-Osgood:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{P}\right)^{m} \quad , \quad P = 650\,MPa \quad , \quad m = 4$$

Ejercicio 3.12*

Un cilindro muy largo con sus extremos empotrados, espesor de pared de 1 cm y radio de 30 cm. está sometido a presión interna de valor ***P*** [N/m^2]. El material metálico del que está fabricada la vasija tiene un módulo de elasticidad E=2,1·10^5 N/mm^2 y coeficiente de Poisson ν = 0,3. El material experimenta endurecimiento según una ley tensión-deformación del tipo Ramberg-Osgood:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{650}\right)^{4}$$

Se pide:

a) Plantear el estado tensional en un punto genérico de la vasija.

b) Suponiendo que el material se puede *aproximar* como elástico hasta una valor de tensión equivalente de ***q*** = 400 N/mm^2, determinar el valor de P^* para el que se alcanza, precisamente, la mencionada condición de plastificación inicial usando el criterio de Von Mises.

c) Calcular la variación que experimenta el diámetro del cilindro cuando el valor de P^* calculado en el apartado anterior aumenta en un 1%.

Ejercicio 3.13

Un tanque de expansión esférico de 2 *m* de diámetro y 10 *mm* de espesor, está sometido a presión interna ***P***. El material del que está fabricado tiene un módulo de elasticidad E=2,1·10^5 N/mm^2 y coeficiente de Poisson ν = 0,3. El material experimenta endurecimiento que se describe según una ley de tipo lineal:

$$\sigma_Y = H\left(\bar{\varepsilon}^{pl}\right) = \left\{400 + 1250\,\bar{\varepsilon}^{pl}\right\} MPa$$

Se pide:

a) Plantear el estado tensional en un punto genérico del tanque de expansión.

b) Determinar el valor de $\boldsymbol{P}^*$ para el que se alcanza la condición de plastificación inicial usando el criterio de Von Mises.

c) Calcular la variación que experimenta el diámetro del tanque cuando el valor de $\boldsymbol{P}^*$ calculado en el apartado anterior aumenta en un 10%.

Ejercicio 3.14

Un tubo metálico de 35 *cm* de diámetro y 6 *mm* de espesor ajusta perfectamente en torno a un cilindro perfectamente rígido. Si sobre el tubo actúa una carga de tracción ***P*** (que no actúa sobre el cilindro interior), hallar:

a) El valor de $\boldsymbol{P}^*$ cuando se alcanza la plastificación del tubo si el límite elástico del material es 24 kg/mm^2 y el coeficiente de Poisson ν = 0,3.

b) Las deformaciones del tubo cuando ***P*** supera en un 20% la carga de plastificación del material, si la curva ***tensión*** vs. ***deformación plástica*** viene dada por:

$$\sigma_Y = H\left(\bar{\varepsilon}^{p}\right) = 100\left(\bar{\varepsilon}^{p}\right)^{0,2} \qquad (\sigma \text{ en } kg/mm^2)$$

c) La carga máxima que puede soportar el tubo.

Nota: Supóngase que no existe rozamiento entre el tubo y el cilindro interior. Despréciense las deformaciones elásticas frente a las plásticas para los apartados (*b*) y (*c*) y despréciense las variaciones dimensionales para los apartados (*a*) y (*b*).

Ejercicio 3.15*

Un pilar metálico de 3 *m* de altura, sección circular de 60 *cm* de diámetro y 12 *mm* de espesor soporta una carga axial de compresión ***P*** y un momento torsor $\boldsymbol{M}$ = 0,12 ***P***. Se pide:

a) Encontrar el valor de la carga $\boldsymbol{P}^*$ que produce la plastificación del pilar si en un ensayo de tracción la tensión de fluencia es de σ_Y = 2400 kg/cm^2.

b) Encontrar la relación entre el acortamiento Δ del pilar y el giro por unidad de longitud θ.

c) Hallar los valores de Δ y de θ cuando la carga ***P*** sobrepasa en un 10% la carga de plastificación $\boldsymbol{P}^*$ hallada en (*a*), sabiendo que en el ensayo de tracción las deformaciones correspondientes a tensiones superiores al límite elástico se ajustan a la expresión

$$\varepsilon = \frac{\left(\sigma - \sigma_Y\right)}{h} \qquad \text{con } h = 16000\ kg/cm^2.$$

Nota: Despréciense las deformaciones elásticas frente a las plásticas.

Ejercicio 3.16

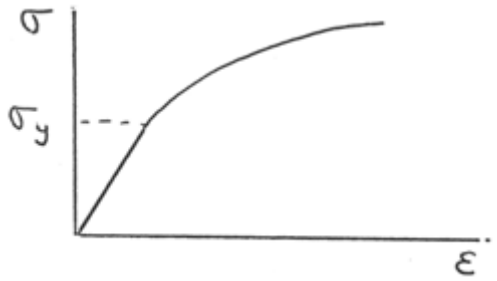
El estado tensional de una chapa de cubierta de una nave industrial viene dado por el tensor de tensiones siguiente:

$$\sigma = \begin{bmatrix} As & Bs & 0 \\ & Cs & 0 \\ sim & & Ds \end{bmatrix}$$

Donde ***s*** es la carga por unidad de superficie en [N/mm²] que soporta la cubierta y A, B, C y D son cuatro constantes adimensionales cuyos valores son los siguientes

A	1250
B	500
C	2800
D	(A+C)/2

El material del que está fabricada la cubierta tiene un módulo de elasticidad E=2,1·10⁵ N/mm², coeficiente de Poisson ν = 0,3, límite de elasticidad σ_Y = 240 N/mm² y una ley tensión-deformación del tipo Lüdwick, como se indica en la figura:



$$\sigma_Y = 240 + 260\left(\bar{\varepsilon}^{pl}\right)^{0.25}$$

Figura 3.4. Curva de endurecimiento y función de ajuste tipo Lüdwick

Se pide:

a. Encontrar el valor de la carga s^* que produce la plastificación de la cubierta según el criterio de Von Mises.

b. Suponiendo que la cubierta está soportando la carga s^*, obtenida en el apartado anterior, se produce una nevada en la zona de localización de la nave industrial, lo cual provoca una acumulación de nieve sobre la cubierta equivalente a 1 KN/m². En estas nuevas condiciones, obtener el tensor de deformaciones de la chapa de cubierta.

Ejercicio 3.17

Un sólido deformable se encuentra sometido a un proceso de carga monótonamente creciente y controlado en tensión, de modo que en un cierto punto del sólido el tensor de tensiones, referido al sistema de coordenadas cartesianas **Oxyz**, tiene las componentes que se indican a continuación, y que dependen del tiempo:

$$\sigma = \sigma(t) = \begin{bmatrix} 2t & t & 0 \\ & 4t & 0 \\ \text{sim.} & & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{Para } \boldsymbol{t} \geq 0$$

El material posee la función de endurecimiento ***H*** que se indica a continuación:

$$\sigma_{\mathrm{Y}} = H\left(\bar{\varepsilon}\right) = \left[A\bar{\varepsilon} + \left(\sigma_{\mathrm{Y0}}\right)^{1/n}\right]^n$$

Cuyos parámetros son los siguientes: $\boldsymbol{A} = 6{,}4\cdot 10^6$ [MPa]$^{1/n}$
$\boldsymbol{n} = 0{,}5$
$\sigma_{\mathrm{Y0}} = 200$ [MPa] (es el límite elástico inicial)

Se pide:

a. Obtenga la evolución en función del tiempo de la ***tensión hidrostática*** $\sigma^h = \sigma^h(t)$, así como de la tensión equivalente de von Mises $q = q(t)$.

b. Determinar el instante de tiempo ***t**** en el que el material plastifica por primera vez.

c. Si el proceso de solicitación mecánica ***prosigue*** a partir de ***t = t****, explique ***brevemente*** porqué sí es posible utilizar la Teoría Total de la Plasticidad para cuantificar la subsiguiente variación del tensor de deformación.

d. Despreciando la componente elástica de la deformación, obtenga el valor de la componente de deformación ε_y, y de la deformación desviadora equivalente $\bar{\varepsilon}$ en el instante $\boldsymbol{t = t^* + \Delta t}$, con $\boldsymbol{\Delta t = 0{,}05}$ seg.

Ejercicio 3.18

Un sólido deformable se encuentra sometido a un proceso de carga monótonamente creciente y controlado en tensión, de modo que en un cierto punto del sólido el tensor de tensiones, referido al sistema de coordenadas cartesianas **Oxyz**, tiene las componentes que se indican a continuación, y que dependen del tiempo:

$$\sigma = \sigma(t) = \begin{bmatrix} 2t & t^2 & 0 \\ & 4t & 0 \\ \text{sim.} & & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{Para } \boldsymbol{t} \geq 0$$

El material posee la función de endurecimiento ***H*** que se indica a continuación:

$$\sigma_{\mathrm{Y}} = H\left(\bar{\varepsilon}^{\,p}\right) = \left[A\bar{\varepsilon}^{\,p} + \left(\sigma_{\mathrm{Y0}}\right)^{1/n}\right]^n$$

Cuyos parámetros son los siguientes: $\boldsymbol{A} = 6{,}4\cdot 10^6$ [MPa]$^{1/n}$
$\boldsymbol{n} = 0{,}5$
$\sigma_{\mathrm{Y0}} = 200$ [MPa] (es el Límite elástico inicial)

Se pide:

a. Obtenga la evolución en función del tiempo de la ***tensión hidrostática*** $\sigma^h = \sigma^h(t)$, así como de la **tensión equivalente de von Mises** $q = q(t)$.

b. Determinar el instante de tiempo ***t**** en el que el material plastifica por primera vez.

c. Si el proceso de solicitación mecánica ***prosigue*** a partir de ***t = t****, explique ***brevemente*** porqué no es posible utilizar la Teoría Total de la Plasticidad para cuantificar la subsiguiente variación del tensor de deformación.

d. Obtenga una aproximación para el valor de la componente de deformación ε_x, así como de la respectiva componente plástica ε_x^p, ambos en el instante $\boldsymbol{t = t^* + \Delta t}$, con $\boldsymbol{\Delta t = 0{,}02}$ seg.

Ejercicio 3.19*

La placa de la figura se encuentra en contacto ***sin fricción*** en sus aristas superior, inferior e izquierda con otros elementos rígidos. Además, ***no existen*** otras restricciones de movimiento para la placa en la dirección ***Z***. Las dimensiones de la placa son ***L*** = 500 mm, ***h*** = 250 mm y ***e*** = 50 mm, mientras que el espesor de la pared lateral a la izquierda de la placa es ***a*** = 100 mm.

Mediante un sistema de inducción de fuerzas electromagnéticas se aplica sobre la placa un campo de *fuerzas de volumen* en la dirección horizontal, en sentido contrario al eje X. Esta fuerza es variable con la posición, según se indica en la expresión siguiente, en la que X es la coordenada material referida al sistema de ejes coordenados de la figura e $\vec{\imath}$ es un vector unitario en la dirección de X**:**

$$\vec{f} = -\frac{k}{X^2}\vec{\imath} \qquad \text{con} \qquad a \le X \le a + L \quad ; \quad k \ge 0$$

El parámetro ***k*** es controlado a voluntad por el operador del sistema de inducción de fuerzas. Como resultado de estas fuerzas, el tensor de tensiones en la placa tiene componentes que dependen de la coordenada X de la posición de cada punto de la placa.

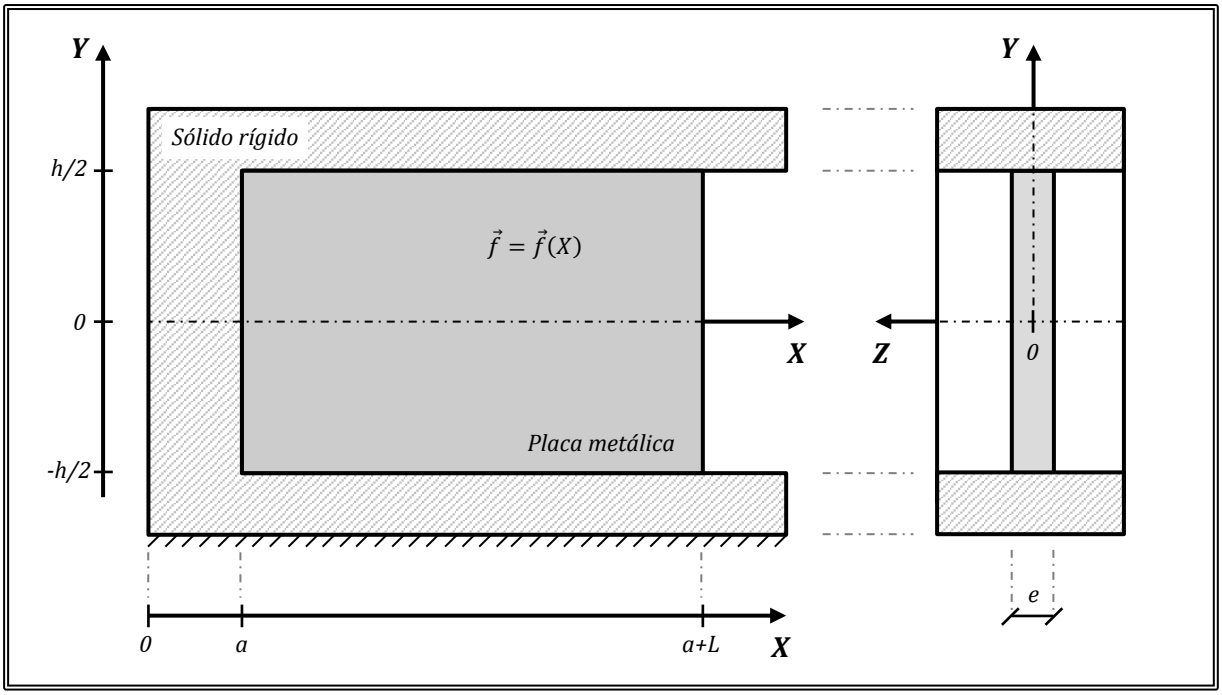


Figura 3.5. Estructura, ejes y solicitación mecánica para el ejercicio 3.19.

La placa está realizada en un material elasto-plástico. Su Módulo de Elasticidad es ***E*** = 70 GPa, su coeficiente de Poisson es **ν** = 0,28. Mediante un ensayo de tracción uniaxial se determinó tanto el límite elástico inicial σ_{Y0} como la curva de endurecimiento del material, encontrándose que éstos se ajustan a ley de Lüdwick:

$$\sigma_Y = \sigma_{Y0} + A\left(\overline{\varepsilon}^p\right)^N \qquad \text{donde:} \qquad \sigma_{Y0} = 300MPa \;\; ; \;\; A = 100MPa \;\; ; \;\; N = 0{,}04$$

<u>Cuestiones</u>:

(1) Demuestre, utilizando las ecuaciones de equilibrio interno y la definición de $\vec{f}$, que la componente σ_x del tensor de tensiones σ en la placa obedece a la expresión siguiente:

$$\sigma_x = \sigma_x(X) = k\left(\frac{1}{a+L} - \frac{1}{X}\right) \qquad \text{donde} \qquad \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_y & \tau_{yz} \\ sim & & \sigma_z \end{bmatrix}$$

(2) Obtenga las otras componentes del tensor de tensiones, para el rango de valores de k en que el material aún no ha plastificado.

(3) En el rango elástico, obtenga la tensión hidrostática $\boldsymbol{p}$ y la tensión equivalente de von Mises $\boldsymbol{q}$, ambas en función de la posición X, del parámetro k y del coeficiente de Poisson $\boldsymbol{\nu}$. Además, indique cuál es la posición X de la placa más solicitada desde el punto de vista de la tensión de von Mises.

(4) Si el valor del parámetro de control k se incrementa progresivamente desde 0, determine el valor $k = k^*$ para el cual se produce plastificación inicial del material en la posición de máxima solicitación mecánica. Utilice para ello el criterio de plastificación de von Mises.

(5) En este instante de plastificación inicial y en la posición de máxima solicitación mecánica, calcule la variación que ha sufrido el espesor de la placa desde la condición inicial (descargada).

(6) Si a continuación, el valor de k se incrementa hasta $k = 1{,}02\ k^*$, determine el nuevo espesor de la placa en la posición de máxima solicitación. Utilice para ello la Teoría Incremental de la plasticidad.

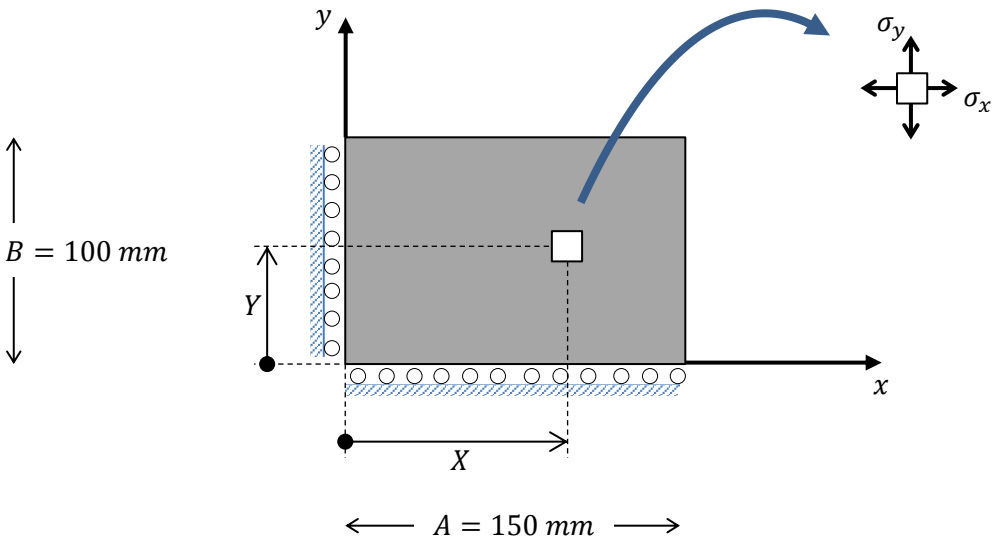
(7) ¿Existe algún valor de k suficientemente alto como para para producir la plastificación completa de *toda* la placa? Si Usted piensa que sí, proponga un método para estimar este valor (aunque no es necesario que lo evalúe). Si, por el contrario, Usted piensa que no existe dicho valor, justifique su respuesta.

Ejercicio 3.20*

Considere la placa rectangular que se muestra en la figura, de espesor inicial $e = 5\ mm$ y dimensiones iniciales $A = 150\ mm$ y $B = 100\ mm$. Sobre ella se aplica un campo de fuerzas de volumen: como resultado de estas fuerzas, el tensor de tensiones en la placa tiene una componente σ_x que depende de la coordenada X de la posición de cada punto de la placa, mientras que la componente σ_y es, por su parte, independiente de la posición en la placa. Es decir:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{donde:} \quad \sigma_x = \sigma_x(X) = k\left\{a\left(\frac{X}{A}\right)^2 + b\left(\frac{A-X}{A}\right)^2 + c\right\} \quad ; \quad \sigma_y = kd$$

Donde: $a = -20\ MPa$; $b = -40\ MPa$; $c = 60\ MPa$; $d = 20\ MPa$



El factor k es un parámetro adimensional que puede ajustarse a voluntad. En esta solicitación mecánica k crece progresivamente a partir de un valor inicial $k = 0$.

El material de la placa es elasto-plástico. Su módulo de elasticidad es $E = 75\ GPa$, su coeficiente de Poisson es $\upsilon = 0{,}3$.Mediante un ensayo de tracción uniaxial se determinó tanto el límite elástico inicial σ_{Y0} como la curva de endurecimiento, encontrándose que se ajustan a la Ley de Lüdwick con endurecimiento lineal:

$$\sigma_Y = \sigma_{Y0} + \alpha\bar{\varepsilon}^p \qquad donde: \qquad \sigma_{Y0} = 300\ MPa \quad ; \quad \alpha = 75MPa$$

<u>Cuestiones</u>:

- Obtenga la presión hidrostática p y la tensión equivalente de von Mises q, ambas en función de las componentes σ_x y σ_y del tensor de tensiones.

- A partir de lo anterior, demuestre la siguiente relación:

$$\frac{dq}{dX} = \frac{1}{2}\left(\frac{2\sigma_x \frac{d\sigma_x}{dX} - \sigma_y \frac{d\sigma_x}{dX}}{q}\right)$$

  De esta expresión, deduzca cuál es la zona más solicitada de la placa desde el punto de la tensión de von Mises (<u>ayuda</u>: considere que $2\sigma_x - \sigma_y \neq 0$).

- Para esta región de máxima solicitación, obtenga el valor $k = k^*$ para el cual se produce plastificación inicial del material. Utilice para ello el criterio de plastificación de von Mises.

- En este instante de plastificación inicial y en la posición de máxima solicitación mecánica, calcule el nuevo espesor de la placa.

- Si a continuación, el valor de k se incrementa hasta $k = 1{,}05\ k^*$, determine el nuevo espesor de la placa en la posición de máxima solicitación. (<u>Nota</u>: indique explícitamente si usted usará Teoría Incremental o Teoría Total de la plasticidad y justifique esta elección).

Parte D.- Ejercicios sobre Plasticidad 2D (Líneas de Deslizamiento)

Ejercicio 3.21

Para analizar un problema de indentación asimétrica se ha propuesto la red de líneas de deslizamiento (o líneas de discontinuidad de velocidades) que se muestra en la *figura 3.6*. Se sabe que la tensión tangencial de plastificación del material es ***k***. Se pide:

a) Identificar el tipo de todas y cada una de las líneas de deslizamiento de la red propuesta.
b) Obtener el estado tensional en todas las líneas de deslizamiento de la red.
c) Obtener el valor de la presión ***P*** que posibilitaría el proceso de indentación.

Ejercicio 3.22

La *figura 3.7* representa un proceso de extrusión simétrica en el que se hace pasar un bloque metálico por una matriz en forma de cuña simétrica (el eje ***e*** es el ***eje de simetría***). Se propone un campo de deformación definido por las líneas de deslizamiento AD, AC, CD y BC. Despreciando el rozamiento entre matriz y material, se pide:

a) Completar razonadamente la geometría (ángulos entre líneas de deslizamiento) del sistema de líneas propuesto.
b) Establecer razonadamente el tipo de todas y cada una de las líneas de deslizamiento.
c) Obtener una cota superior para la presión de extrusión **P**.

Ejercicio 3.23

Para analizar un problema de extrusión se ha propuesto la red de líneas de deslizamiento que se muestra en la *figura 3.8*. Se sabe que la tensión tangencial de plastificación para el material de la pieza es ***k***. Se pide:

a) Identificar razonadamente el tipo de todas y cada una de las líneas de la red.
b) Obtener el estado tensional en todas las líneas de la red.
c) Obtener el valor de la presión **P** que posibilitaría el proceso de extrusión.

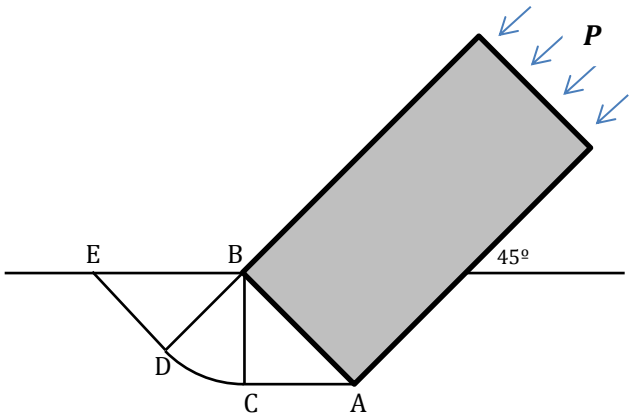


Figura 3.6. Indentación oblicua del ejercicio 3.21

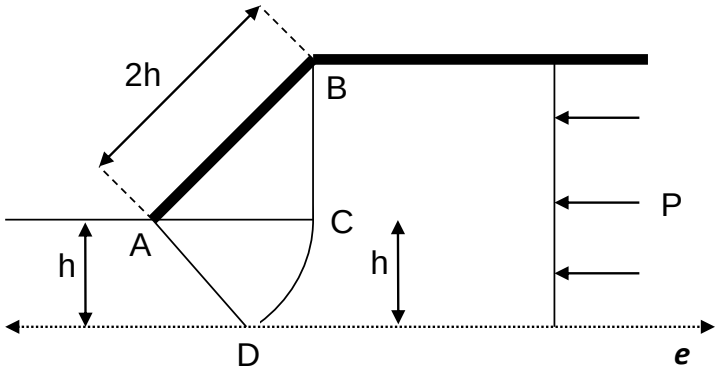


Figura 3.7. Proceso de extrusión del ejercicio 3.22

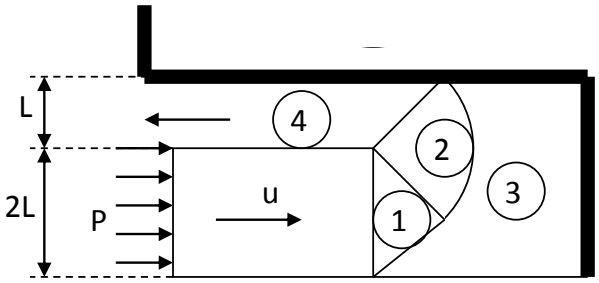


Figura 3.8. Proceso de extrusión del ejercicio 3.23

Ejercicio 3.24

Una chapa metálica entallada se encuentra sometida a tensión uniforme ***P*** en una zona que puede considerarse lejana a las entallas, tal como muestra la *figura 3.9*. El material de la chapa puede considerarse como rígido perfectamente plástico, con tensión de plastificación a cortadura igual a ***k*** = 225 MPa. El estado tenso-deformacional puede considerarse como de deformación plana.

Para analizar este problema se propone la red de líneas de deslizamiento que se muestra en el lado derecho de la *figura 3.9* (por simetría, sólo se muestra la red en la mitad superior de la chapa).

Se pide:

- Identificar el tipo de todas las líneas de la red de líneas de deslizamiento propuesta.
- Encontrar el valor de la tensión ***P*** que posibilitaría un proceso de deformación según la red de líneas propuesta.

<u>Notas</u>:

+ Considere que los "labios" de ambas entallas son horizontales.
+ Observe que los "labios" de las entallas son "superficies libres".
+ Considere que $\measuredangle(BAG) = \measuredangle(DEF) = \pi/4$

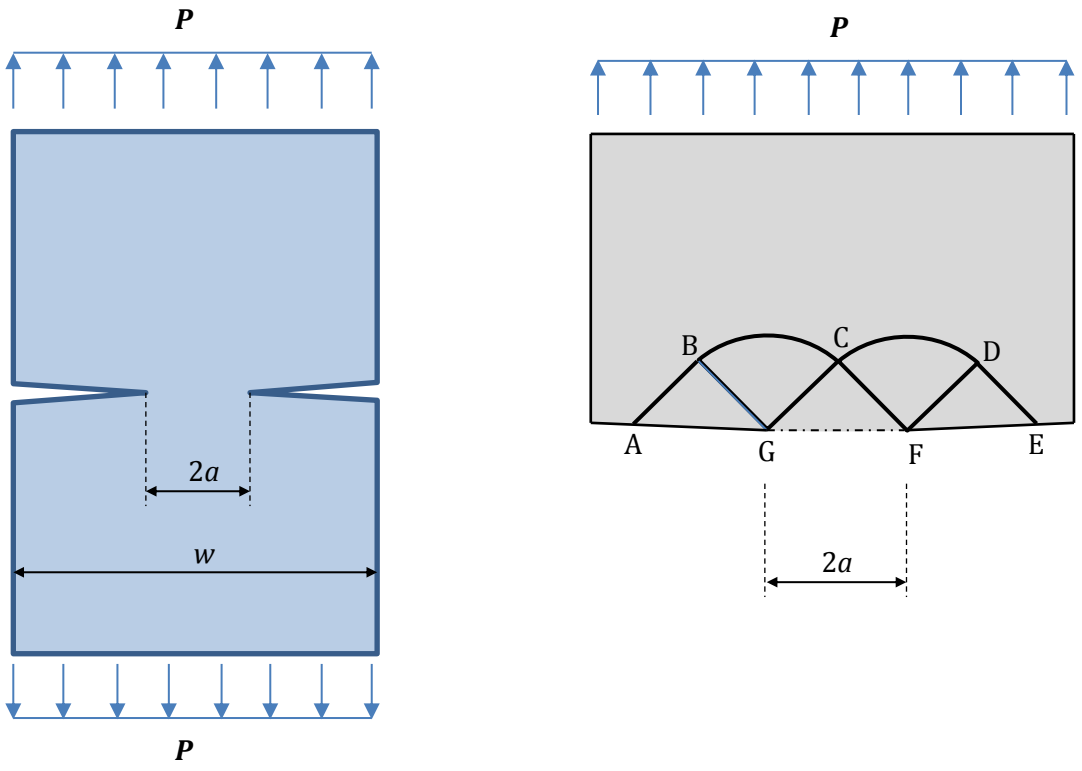


Figura 3.9. Chapa entallada del ejercicio 3.24

Ejercicio 3.25

Una chapa metálica se encuentra sometida a un proceso de extrusión, mediante la aplicación de una fuerza ***P***, tal como muestra la *figura 3.10*. El material de la chapa puede considerarse como rígido perfectamente plástico, con tensión de plastificación a cortadura igual a ***k*** = 225 MPa. El estado tenso-deformacional puede considerarse como de deformación plana. El material fluye libremente hacia la izquierda, sin más oposición que la de la matriz de conformado.

Para analizar este problema se propone la red de líneas de deslizamiento que se muestra en la figura (por simetría, sólo se muestra la red en la mitad superior de la chapa).

Se pide:

- Identificar el tipo de todas las líneas de la red de líneas de deslizamiento propuesta (líneas D'ABC, DAB'C', DB y D'B').
- Encontrar el valor de la tensión de contacto perpendicular y paralela a la línea de contacto CD entre la chapa y la matriz de conformado.

Para h= 5mm, encontrar el valor de la carga ***P*** que posibilitaría un proceso de deformación según la red de líneas propuesta.

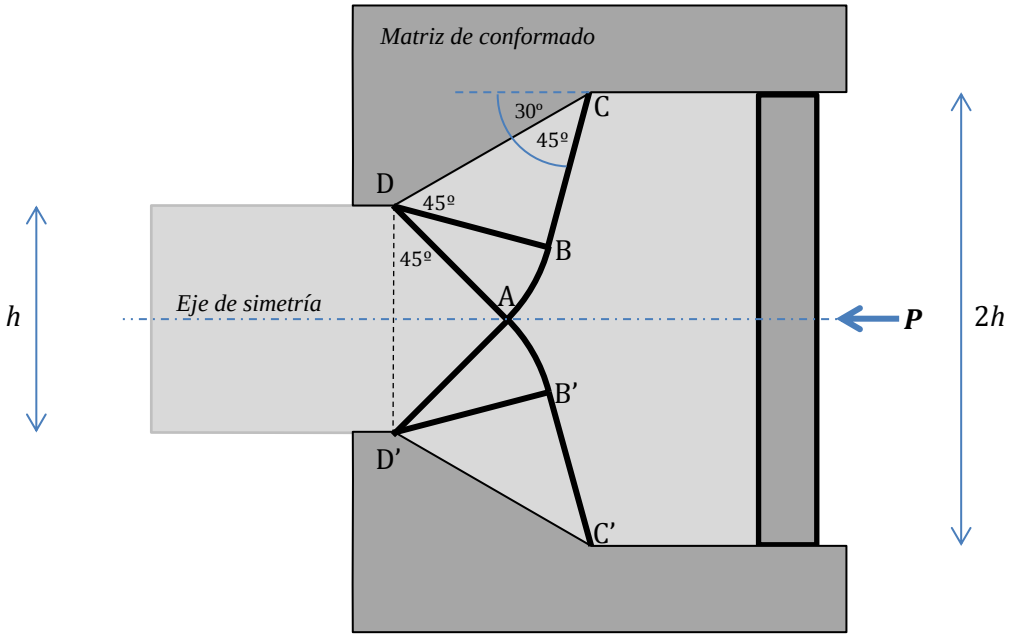


Figura 3.10. Problema de extrusión, ejercicio 3.25

Notas:

++ Tensión hidrostática: $p = -\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$

++ Para líneas α: $p_A + 2k\theta_A = p_B + 2k\theta_B$

++ Para líneas β: $p_A - 2k\theta_A = p_B - 2k\theta_B$

TEMA 4 – INTRODUCCIÓN A VISCOELASTICIDAD

Parte A.- Problemas sobre Modelos Generalizados en Viscoelasticidad

Ejercicio 4.1

Para el sistema cuyo comportamiento viscoelástico se refleja en el modelo de la figura 4.1, se pide determinar:

a) La ecuación diferencial del modelo
b) La función de fluencia
c) El módulo de relajación
d) Cómo varía en el tiempo la deformación, si el sistema se somete a una tensión σ_0 aplicada súbitamente
e) Cómo varía en el tiempo la tensión si en la situación del apartado (d) y una vez alcanzada una deformación ε_1 se mantiene ésta en el tiempo.

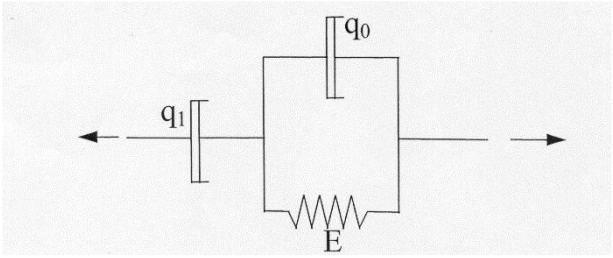


Figura 4.1 Modelo de tres elementos

Ejercicio 4.2

En la figura 4.2 se describe un modelo de comportamiento de un cierto material. Se pide:

a) **Plantear** la ecuación diferencial del modelo
b) Determinar la expresión de la evolución temporal de la deformación cuando se aplica súbitamente (t = 0) una tensión σ_0 que luego se mantiene en el tiempo,
c) Determinar la expresión de la evolución temporal de la tensión cuando en la situación del apartado anterior y una vez alcanzada una cierta deformación ε_1, se mantiene ésta en el tiempo.

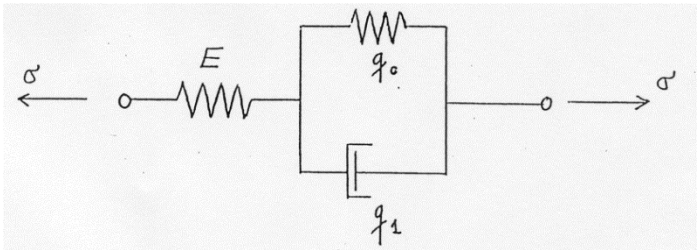


Figura 4.2 Modelo de tres elementos

Ejercicio 4.3*

En la figura 4.3 se describe un modelo de comportamiento de un cierto material viscoelástico.

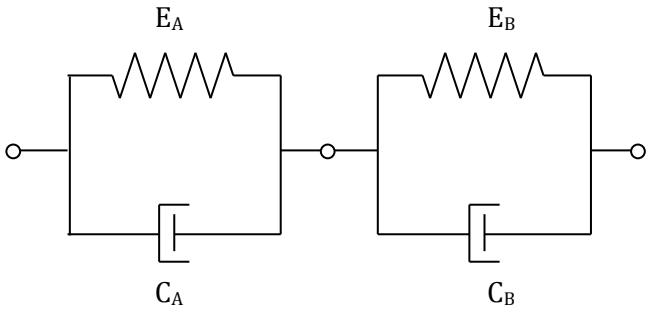


Figura 4.3 Modelo viscoelástico (dos elementos tipo Kelvin dispuestos en serie)

Se pide:

a) **Plantear** la ecuación diferencial del modelo.
b) Determinar la Función de Fluencia y el Módulo de Relajación.
c) Determinar la expresión de la evolución temporal de la deformación que se obtiene de aplicar súbitamente en t = 0 una tensión σ_0, que luego se mantiene en el tiempo hasta $t=t_1$.
d) Si en la situación del apartado (c), la deformación es fijada cuando alcanza el valor ε_1 en el instante $t= t_1$, determinar la expresión de la evolución temporal de la tensión $\sigma(t)$ para $t>t_1$.

Parte B.- Problemas sobre PPio. de Correspondencia e Integrales Hereditarias

Ejercicio 4.4

Una ménsula metálica tiene 1 *m* de longitud y una sección rectangular 0,05x0,1 *m* (ancho x canto) y está fabricada con un material cuyo peso específico es 70 N/dm^3. Sobre una probeta del material se ha realizado un ensayo de ***relajación*** aplicando una deformación $\varepsilon(t) = 10^{-3}$ H(t) y se ha medido la evolución de la tensión, evolución que puede aproximarse adecuadamente mediante la función $\sigma(t) = 10^4+1\ 0^2\exp(-t/0,5)$ *Pa*.

Durante un tiempo t_0 = 5 *días* la ménsula ha estado soportando exclusivamente su propio peso, pero en ese momento se le añade una sobrecarga uniforme que duplica el peso, según se esquematiza en la gráfica de la figura 4.4.

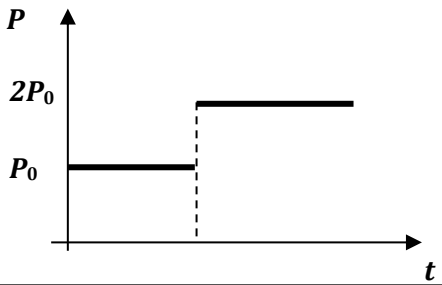


Figura 4.4 Solicitación mecánica variable en el tiempo

Se pide:

1. Enunciar el principio de correspondencia y explicar su aplicación a la obtención de la flecha de la ménsula en instantes posteriores
2. Obtener la flecha en el extremo libre de la ménsula en el instante to
3. Plantear el concepto de integral hereditaria y explicar su aplicación en el caso de cargas no constantes en el tiempo
4. Obtener la flecha en el extremo libre de la ménsula a tiempo infinito

Notas:

- La flecha ***f*** en el extremo libre de una ménsula de longitud L sometida a sobrecarga uniforme p obedece a la expresión:

$$f = \frac{pL^4}{8EI}$$

Ejercicio 4.5

Una viga biapoyada de longitud L = 2 e inercia a flexión I = 10^{-5} m^4 se encuentra sometida a una carga uniformemente distribuida hacia debajo de valor q = 1000 N/m; las condiciones de diseño exigen que el desplazamiento vertical del centro de la viga nunca supere el 0,2% de la longitud. Inicialmente, la temperatura en servicio es de 20ºC, pero después de unos meses, se requiere aumentar la temperatura en 100ºC.

Del material, se sabe que a 20ºC muestra un comportamiento elástico lineal con un Módulo de Elasticidad E = 10^{10} Pa; para conocer su comportamiento a 120ºC se ha realizado un ensayo de relajación aplicando una deformación constante $\varepsilon_0 = 10^{-3}$, en el que se midió la evolución de la tensión, evolución que puede aproximarse mediante:

$$\sigma(t) = 10^4 + 10^2 \exp(-2t)$$

con el tiempo ***t*** medido en segundos.

Se pide determinar si la viga cumplirá las especificaciones de diseño para las nuevas condiciones de servicio.

Nota:

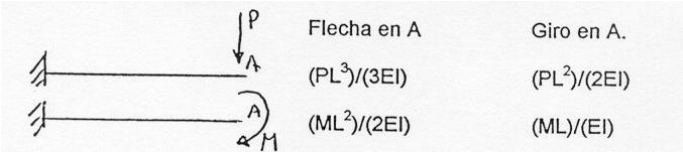
Se recuerda que la flecha en el centro del vano para una viga bi-apoyada sometida a carga uniformemente distribuida obedece a la expresión:

$$v = \frac{5qL^4}{384EI}$$

Ejercicio 4.6*

El soporte de la figura 4.5.1, cuyos elementos tienen una inercia ***I***, soporta en el punto *C* una carga puntual vertical de valor ***P(t)*** (figura 4.5.2), que proviene de la aplicación brusca del peso $\boldsymbol{P_0}$ de una farola y de una progresiva acumulación de materia (suciedad,...); el material del que está constituido el soporte tiene un comportamiento viscoelástico que puede considerarse reflejado en un modelo tipo Maxwell. Se pide obtener la variación en el tiempo del desplazamiento vertical del punto C.

Nota: se recuerdan las siguientes expresiones de Resistencia de Materiales:



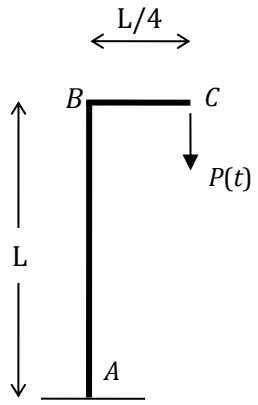


Figura 4.5.1

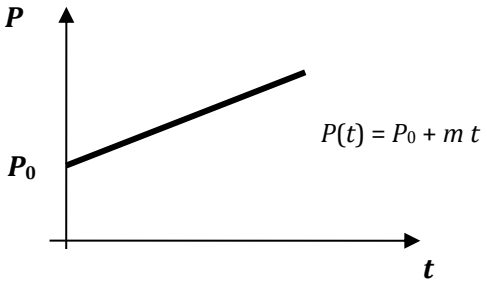


Figura 4.5.2

Ejercicio 4.7

Una ménsula horizontal de longitud 2 m tiene una sección con un momento de inercia $\boldsymbol{I} = 0{,}14\text{x}10^{-4}$ m⁴. Sobre una probeta del material de la ménsula se ha realizado un ensayo de relajación aplicando una deformación $\varepsilon(t) = 10^{-3}\,H(t)$ y se ha medido la evolución de la tensión, evolución que puede aproximarse adecuadamente mediante la función:

$$\sigma(t) = 10^4 + 10^2 \exp(-2t) \text{ Pa.}$$

Una nevada de gran intensidad deposita en 2 horas sobre la ménsula una capa de nieve que equivale a una sobrecarga uniforme $\boldsymbol{P_0} = 70$ N/m; a partir de las dos horas de nevada, la nieve tarda en derretirse 10 horas más, lo que se esquematiza en la figura 4.6.

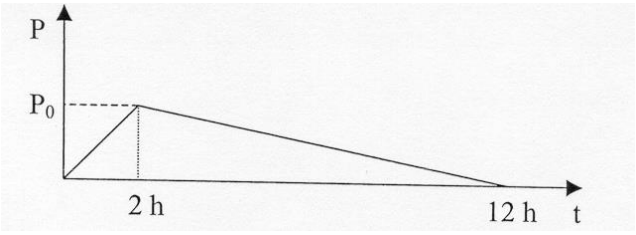


Figura 4.6 Modelo de tres elementos

Se sabe que para evitar que la nieve se desprenda bruscamente, el giro de la sección del extremo libre de la ménsula no debe superar los 0,2 radianes. Sabiendo que el giro de dicho extremo libre en una ménsula sometida a carga uniforme es:

$$\theta = \frac{qL^3}{6EI}$$

Se pide determinar si la nieve llegará a desprenderse.

Ejercicio 4.8

El pórtico de la figura 4.7 está formado por un material viscoelástico, conociéndose su función de fluencia **J(*t*)** y su módulo de relajación **Y(*t*)**. Sobre el dintel del pórtico actúa una carga ***p*(*t*)** por unidad de longitud, que se aplica bruscamente en el instante ***t* = 0**. Sabiendo que la inercia del dintel es ***I***, calcular:

a. La variación temporal de la flecha central del dintel suponiendo que los pilares impiden cualquier giro de sus secciones extremas.

b. La variación temporal de la flecha central del dintel suponiendo que la rigidez a flexión de los pilares es constante y de valor ***k***.

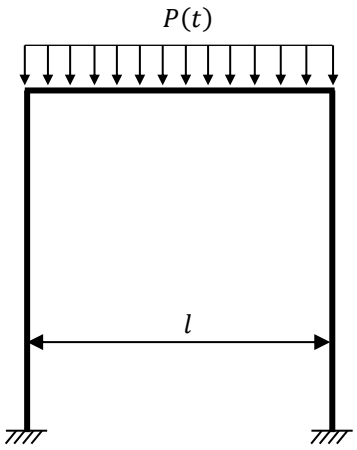


Figura 4.7 *Pórtico realizado en material viscoelástico*.

Ejercicio 4.9

La viga de la figura se encuentra empotrada en una superficie rígida a la izquierda mientras que a la derecha está empotrada en un elemento deslizante que puede moverse sobre la vertical. Sobre el elemento deslizante se aplica una fuerza variable en el tiempo, P=P(t), en dirección vertical hacia abajo, que produce como resultado un desplazamiento hacia abajo, δ =δ(t).

La variación de la carga en el tiempo está dada por: P = P(t) = A·t (con A=cte. y ***t*** en ***segundos***)

Figura 4.8 *Viga bi-empotrada con un extremo móvil*.

De la teoría de Resistencia de Materiales para materiales elásticos, se conoce que la relación carga vs desplazamiento para una viga como la de la figura es del tipo:

$$P = K\cdot\delta \qquad \text{donde} \quad K = \frac{12EI}{L^3}$$

Sin embargo, el material en el que está realizada la viga de la figura es de tipo viscoelástico. Para conocer su comportamiento mecánico, se realizó un ensayo de relajación uniaxial a la deformación constante de $\varepsilon_0 = 0.001$, obteniéndose una tensión variable en el tiempo que se puede ajustar a la expresión:

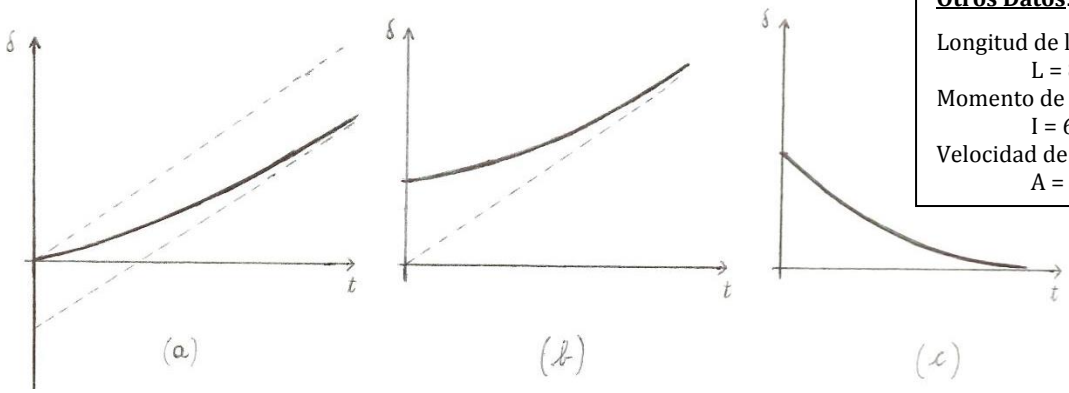
$$\sigma(t) = 70\left\{1 + 2\exp\left(-0.006\,t\right)\right\}\ \text{MPa}$$

Se pide:

i. Obtener la Función de Fluencia del material.

ii. Obtener la función $\delta = \delta(t)$ que da el desplazamiento del elemento deslizante en función del tiempo.

iii. Indicar cuál de las tres siguientes figuras – **(*a*)**, **(*b*)** o **(*c*)** – constituye una representación cualitativa adecuada de la evolución del desplazamiento en función del tiempo obtenida en (***ii***.). Fundamente ***brevemente*** su respuesta.



Otros Datos:

Longitud de la viga:
L = 850 mm
Momento de inercia:
I = 6500 mm⁴
Velocidad de aplicación de la carga:
A = 0.5 N/s

Ejercicio 4.10

Un cilindro de pared delgada sometido a presión interior tiene sus extremos soldados a paredes rígidas inamovibles. Sus dimensiones se muestran en la figura adjunta. El cilindro está realizado en un material viscoelástico cuya función de fluencia se indica más abajo en la sección de datos. La presión interior varía en el tiempo según se indica.

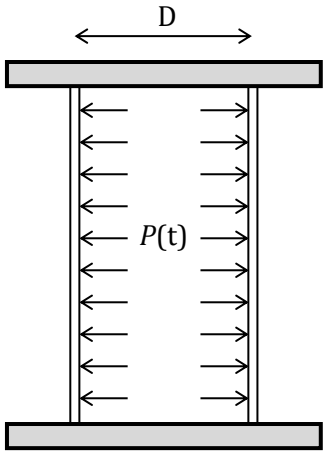
Determine el incremento de diámetro del cilindro en función del tiempo, ΔD, después de 300 días.

Nota: la longitud del cilindro puede considerarse mucho mayor que su diámetro. Además, despréciese la tensión radial.

Datos: $D_0 = 350$ mm
$e = 5$ mm

Considerando t en segundos:

- $J(t) = \dfrac{2 - \exp\left(-2\cdot10^{-7}\,t\right)}{210000}\left[\dfrac{1}{MPa}\right]$
- $P(t) = \left(40 + 10^{-6}\,t\right)MPa$



TEMA 5 – INTRODUCCIÓN A VISCOPLASTICIDAD

Parte A.- Problemas sobre Leyes de Fluencia Estacionaria

Ejercicio 5.1

El componente mecánico que se muestra en la figura presenta un área transversal inicial de 10 mm^2 y estará sometido a una carga constante, orientada según su eje, de 50kg a una temperatura ambiente de 600ºC. Considerando que el tiempo de vida útil del componente mecánico no puede ser inferior a los 4 años y que durante ese tiempo la deformación máxima permitida será de 2%:

a. Determinar, de los materiales que se presentan en la tabla, cuál es el más adecuado.

b. Para el material seleccionado, determinar el coeficiente de seguridad respecto al tiempo de vida útil.

Material	Ley de fluencia estacionaria
A	$\dot{\varepsilon} = 8{,}5\ 10^{-4}\sigma^3 exp(-17000/T)$
B	$\dot{\varepsilon} = 30\ 10^{-4}\sigma^3 exp(-13000/T)$
C	$\dot{\varepsilon} = 0{,}2\ 10^{-4}\sigma^3 exp(-13000/T)$
Datos para la Ley de Fluencia estacionaria: t = [horas] T = [K] σ = [MPa]	

Tabla 5.1.

Ejercicio 5.2

Se tiene una tubería de 80 cm de radio y 5 mm de espesor, que se encuentra sometida a una presión interna de 1 MPa y por la que se transporta un fluido a 300 ºC. El acero utilizado en la fabricación presenta una Ley de fluencia estacionaria dada por la siguiente expresión:

$\dot{\varepsilon} = 0{,}2\sigma^3 exp(-13000/T)$ donde $\dot{\varepsilon}$ viene dado en [horas^{-1}], $\boldsymbol{\sigma}$ en [MPa] y $\boldsymbol{T}$ en [K].

Considerando que la presión interna permanece constante durante 2000 horas, determine la deformación del recipiente al finalizar este periodo.

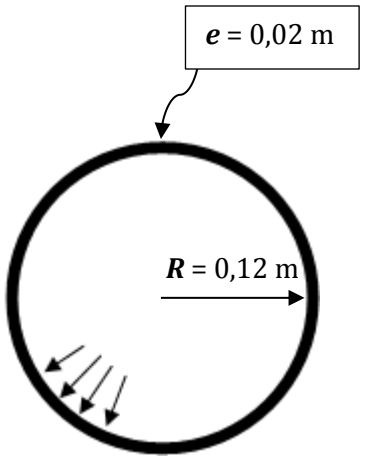
Ejercicio 5.3

Por una tubería de pared delgada, cuyas dimensiones se indican en la figura adjunta, circula un gas a presión de 40 MPa y 600 ºC de temperatura. Por requerimientos de diseño el incremento debido a fluencia de su radio no debe superar los 6 mm en un período de 2 años. Transcurrido un año, se detecta que con las condiciones de servicio indicadas anteriormente, no se puede cumplir este objetivo.

Calcular la presión a la que debería circular el gas durante el segundo año en servicio, para poder cumplir el requerimiento de diseño.

Nota: considerar tubo de pared delgada.

Datos: Ley de fluencia estacionaria del material: $\dot{\varepsilon} = 0.02\,\sigma^3 \exp\left(\frac{-16000}{T}\right)$, donde $\dot{\varepsilon}$ viene dado en [horas^{-1}], σ en [kp/mm^2] y T en [ºK].

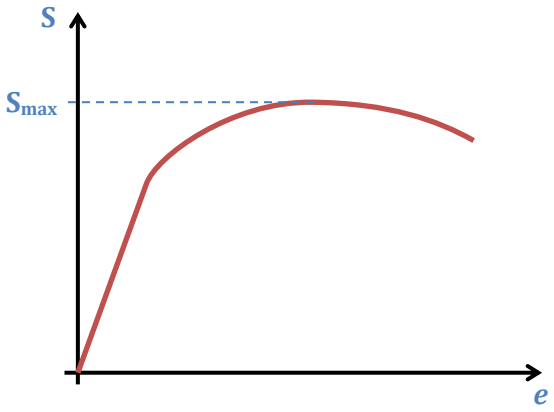


SOLUCIONES DE ALGUNOS DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

Tema 1 – Ejercicios de repaso de conceptos básicos

Ejercicio 1.3

La "Resistencia a la Tracción" es el valor de ***tensión ingenieril*** calculado justo en la condición de carga máxima. Es decir, corresponde al "punto más alto" en la curva de ***tensión ingenieril* S** vs ***deformación e***, tal como se aprecia en la siguiente figura



Por definición de tensión verdadera, se tiene: $F = \sigma A$ (1)

Condición de carga máxima: $dF = 0 = A\,d\sigma + \sigma\,dA$

Por lo tanto: $$\frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{dA}{A} \quad (2)$$

Si se admite que en la zona plástica hay ***conservación de volumen***, se tiene:

$$AL = cte. \quad \Rightarrow \quad d(AL) = A\,dL + L\,dA = 0$$

Por lo tanto: $$\frac{dL}{L} = -\frac{dA}{A} \quad (3)$$

De (2) y (3) se deduce que: $$\frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{dL}{L} = d\varepsilon \quad (4)$$

Por lo tanto, la condición de carga máxima es: $$\boxed{\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \sigma} \quad (5)$$

$\Rightarrow$ ¡¡ Corresponde al punto en el que la pendiente de la curva **σ–ε** coincide con **σ** !!

Al correspondiente valor de la ***tensión ingenieril*** se le denomina "Resistencia a tracción" (se denota usualmente como S_u)

Nota histórica:

Al criterio definido por la expresión (5) se le conoce como el "**Criterio de Considère**", que fue propuesto por Armand Considère en 1885 como herramienta para identificar el instante en el que comienza a formarse un ***cuello de estricción***. Esencialmente, el criterio indica que el cuello de estricción comienza a formarse en el punto en el que [el incremento de la tensión debido a la disminución de la sección

transversal] supera [al incremento en la capacidad resistente del material asociado al endurecimiento de dicho material por deformación plástica].

Tema 1 – Problemas básicos sobre plasticidad 1-D

Ejercicio 1.4

Un modelo de endurecimiento del tipo $\sigma = K\varepsilon^n$ se conoce como "Ley de Holomon" y es aplicable en régimen plástico, cuando se verifican las siguientes dos condiciones:

Primera: experimentalmente, el material muestra una "transición suave" entre la región elástica y la región elasto-plástica, sin que se aprecie, por tanto, un "límite elástico bien definido" en la curva tensión-deformación del material.

Segunda: que la ***deformación elástica*** es "*despreciable*" frente a la ***deformación plástica*** y, por lo tanto, la deformación ***total*** es prácticamente igual a la deformación ***plástica***.

Para la Ley de Holomon ($\sigma = K\varepsilon^n$), la condición de carga máxima (expresada en el Ejercicio 1.3) es la siguiente:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = Kn\varepsilon^{n-1} = \sigma = K\varepsilon^n \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = n \quad \Rightarrow \quad \sigma = Kn^n$$

Recordando que $\sigma = S_u(1+e)$, y que $\varepsilon = \ln(1+e)$, la ***Resistencia a Tracción*** $\mathbf{S_u}$ para un material que obedece a la Ley de Holomon es:

$$S_u = \frac{Kn^n}{\exp(n)}$$

Para K = 450 MPa y n = 0.25, se tiene: $S_u = \dfrac{450 \cdot 0.25^{0.25}}{\exp(0.25)} = 247.8MPa$

Nota: para conocer más detalles de la Ley de Hollomon, así como sobre otras leyes empíricas de endurecimiento por deformación plástica, consultar la solución al ejercicio 3.7.

Ejercicio 1.10

En el instante de plastificación inicial de las barras, el valor de la deformación será el correspondiente al límite elástico inicial del material, tal y como se puede observar en la Tabla 1 proporcionada en el enunciado. Por lo tanto:

$$\varepsilon_A^1 = \frac{\sigma_{Y0}^1}{E} = \frac{320}{200000} = 0.0016$$

$$\varepsilon_A^2 = \frac{\sigma_{Y0}^2}{E} = \frac{400}{200000} = 0.0020$$

Para calcular la deformación de cada barra en función del desplazamiento vertical impuesto ***u,*** se hará uso de la definición de deformación ingenieril:

$$\varepsilon(u) = \frac{l(u) - l_0}{l_0}$$

donde la longitud inicial de cada barra será: $l_0 = 500\ mm$, obtenida mediante el teorema de Pitágoras; y la longitud actual de cada barra, obtenida según la misma metodología, vendrá definida por:

$$l(u) = \sqrt{300^2 + (400 + u)^2}$$

$$l(u) = \sqrt{250000 + 800u + u^2}$$

Finalmente, la deformación en cada barra vendrá dada por:

$$\varepsilon(u) = \frac{l(u) - l_0}{l_0} = \sqrt{1 + \frac{800}{250000} \cdot u + \frac{u^2}{250000}} - 1 \qquad (1)$$

Nota: Por construcción geométrica, la deformación es siempre **igual en ambas barras**.

El desplazamiento ***u*** en el instante de plastificación inicial de cada una de las barras se calculará particularizando la expresión (1) para los valores de ε_A^1 y ε_A^2 obtenidos anteriormente.

Así, para la **barra 1**:

$$\varepsilon(u_A^1) = \varepsilon_A^1 = 0.0016 = \sqrt{1 + \frac{800}{250000} \cdot u_A^1 + \frac{(u_A^1)^2}{250000}} - 1$$

$$(u_A^1)^2 + 800u_A^1 - 800.64 = 0$$

obteniéndose dos soluciones, una de las cuales carece de sentido físico:

$$u_A^1 = \begin{cases} +1\ mm \\ \sout{-801\ mm} \end{cases}$$

Para **la barra 2**:

$$\varepsilon(u_A^2) = \varepsilon_A^2 = 0.0020 = \sqrt{1 + \frac{800}{250000} u_A^2 + \frac{(u_A^2)^2}{250000}} - 1$$

$$(u_A^2)^2 + 800u_A^2 - 1001 = 0$$

obteniéndose dos soluciones, una de las cuales carece de sentido físico:

$$u_A^1 = \begin{cases} +1.25\ mm \\ \sout{-801.25\ mm} \end{cases}$$

El esfuerzo axil ***P*** en cada barra se obtiene del producto área x tensión, mientras que la tensión se obtiene de la deformación, puesto que la solicitación mecánica es monótonamente creciente.

Esfuerzo axil en barra 1:

$$P_1 = P_1(u) = A_1 \cdot \sigma_1 = \begin{cases} A_1 \cdot E \cdot \varepsilon(u) & si\ u \le u_A^1 = 1\ mm \\ A_1 \cdot \{320 + T \cdot [\varepsilon(u) - 0.0016]\} & si\ u \ge u_A^1 = 1\ mm \end{cases}$$

distinguiendo entre comportamiento puramente elástico y comportamiento elasto-plástico. De esta manera, en el **instante de plastificación inicial**:

$$P_A^1 = P_1(u = u_A^1 = 1\ mm) = 150\ mm^2 \cdot 200000\ MPa \cdot 0.0016 = 48000\ N = 48\ kN$$

mientras que en el **instante en que $u = 2\ mm$:**

$$\varepsilon(u = 2mm) = \sqrt{1 + \frac{800}{250000} \cdot 2 + \frac{2^2}{250000}} - 1 = 0.003203$$

$$P_B^1 = P_1(u = 2\ mm) = 150 \cdot \{320 + 80000 \cdot [0.003203 - 0.0016]\} = 67234\ N = 67.2\ kN$$

Esfuerzo axil en barra 2:

$$P_2 = P_2(u) = A_2 \cdot \sigma_2 = \begin{cases} A_2 \cdot E \cdot \varepsilon(u) & si\ u \le u_A^2 = 1.25\ mm \\ A_2 \cdot \{400 + T \cdot [\varepsilon(u) - 0.0020]\} & si\ u \ge u_A^2 = 1.25\ mm \end{cases}$$

En el **instante de plastificación inicial**:

$$P_A^2 = P_2(u = u_A^2 = 1.25\ mm) = 100\ mm^2 \cdot 200000\ MPa \cdot 0.002 = 40000\ N = 40\ kN$$

mientras que en el **instante en que $u = 2\ mm$:**

$$\varepsilon(u = 2mm) = 0.003203$$

$$P_B^2 = P_2(u = 2\ mm) = 100 \cdot \{400 + 80000 \cdot [0.003203 - 0.002]\} = 49623\ N = 49.6\ kN$$

Ejercicio 2.1

Se estudia en primer lugar el determinante de la matriz Jacobiana:

$$J_\varphi = F = \begin{bmatrix} 1 & -t & 0 \\ t & 1 & 0 \\ -t & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \det(F) = 1 + t^2 > 0$$

$$\Rightarrow \text{ El Movimiento es físicamente posible.}$$

Además, las ecuaciones de movimiento son invertibles.

Se puede demostrar fácilmente que:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= X - Yt \\ y &= Xt + Y \\ z &= Z - Xt \end{aligned}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} X &= \frac{x + yt}{1 + t^2} \\ Y &= \frac{y - xt}{1 + t^2} \\ Z &= z - \left(\frac{x + yt}{1 + t^2}\right) t \end{aligned}}$$

Con esto, la *descripción espacial* de la *evolución temporal* de la densidad del material se obtiene a partir de la *descripción material*, simplemente sustituyendo en ella las *ecuaciones de movimiento inversas*:

$$\begin{aligned} \rho = \overline{\rho}(X, Y, Z, t) &= \rho_0 + \frac{X + Y + Z}{1 + t^2} \\ &= \rho_0 + \frac{\left(\frac{x + yt}{1 + t^2}\right) + \left(\frac{y - xt}{1 + t^2}\right) + \left(z - \left(\frac{x + yt}{1 + t^2}\right) t\right)}{1 + t^2} \\ &\vdots \\ &= \rho_0 + \frac{x + (1 + t + t^2)\, y + (1 + t^2)\, z}{(1 + t^2)^2} = \hat{\rho}(x, y, z, t) \end{aligned}$$

Esta es la descripción espacial de la evolución de la densidad ρ.

Ejercicio 3.4

El estado tensional en el cilindro se puede representar en coordenadas cilíndricas **r,θ,z**. del siguiente modo:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_r & 0 & 0 \\ & \sigma_\theta & 0 \\ sim & & \sigma_z \end{bmatrix}$$

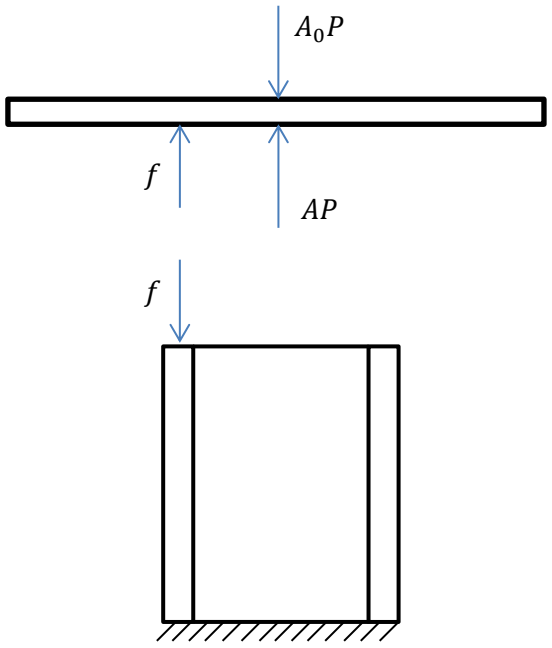
Nótese que las componentes de cortadura son nulas porque no hay fricción en el contacto entre cilindro y tapa. Por tanto σ_r, σ_θ y σ_z son tensiones principales.

En régimen elástico, se puede usar la fórmula de tubos (de la Resistencia de Materiales) para σ_θ:

$$\sigma_\theta = P\frac{radio}{espesor} = P\frac{D}{2t}$$

Para la tensión axial σ_z, debe considerarse que no hay, a priori, ninguna restricción de movimiento vertical para la tapa superior, más que aquella ejercida por las fuerzas asociadas a la presión interior y a las fuerzas de contacto entre tapa y cilindro.

Tomando en cuenta que la presión interior es la misma en las dos cavidades (pues éstas están conectadas), la tensión axial se puede calcular mediante equilibrio de fuerzas verticales:



f: fuerza de contacto entre tapa y cilindro. La asumimos positiva en la dirección de la figura (es decir, cilindro a compresión)

Esta fuerza está distribuida uniformemente en el perímetro de contacto

$$AP + f - A_0P = 0 \quad \Rightarrow \quad f = (A_0 - A)P = (\lambda - 1)AP$$

Puesto que fuerzas positivas que "entran" en una superficie denotan "tensión de compresión" (que es negativa), se tiene que

$$\sigma_z = \frac{fuerza}{área\ de\ contacto} \quad \Rightarrow \quad \sigma_z = \frac{-f}{\pi Dt} = \frac{(1-\lambda)D}{4t}P$$

Nótese que por la relación entre las áreas $\lambda > 1$, la tensión axial es compresiva $\boldsymbol{\sigma_z < 0}$.

Para la tensión radial, se tiene:

$$\sigma_r = \begin{cases} 0 & en\ la\ pared\ exterior\ de\ cil. \\ \\ P & en\ la\ pared\ interior\ del\ cil. \end{cases}$$

Para efectos de calcular la tensión equivalente de von Mises (y también para la tensión del criterio de Tresca), es evidente que el peor caso para σ_r corresponde a $\sigma_r = P$. Por otra parte, teniendo en cuenta que ***D*** >>> ***t***, se tiene que:

$$\sigma_\theta = P\frac{D}{2t} >>> P = \sigma_r \qquad y, por\ otro\ lado, \qquad |\sigma_z| = \frac{(\lambda-1)D}{4t}P >>> P = \sigma_r$$

Es decir: σ_r *es despreciable, en valor absoluto, frente a* σ_θ *y frente a* σ_z

No se cometerá error apreciable en el cálculo de la tensión de von Mises (o en el criterio de Tresca) si se aproxima

$$\boldsymbol{\sigma_r \approx 0}$$

cuando ***D*** >>> ***t***.

Finalmente, el estado tensional en el cilindro se puede representar como:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_r & 0 & 0 \\ & \sigma_\theta & 0 \\ sim & & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ sim & & (1-\lambda)/2 \end{bmatrix} \frac{D}{2t}P$$

Obtenidas las componentes del tensor σ, ya se puede aplicar Tresca:

$$\frac{1}{2}|\ max(\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z) - mín(\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z)\ | \leq \tau_{crít} = \frac{\sigma_Y}{2}$$

Dado que $\sigma_\theta > \sigma_r \approx 0 > \sigma_z$, se tiene que: $\frac{1}{2}\left\{1 - \frac{(1-\lambda)}{2}\right\}\frac{D}{2t}P \leq \frac{\sigma_Y}{2}$

En la condición crítica de igualdad:

$$P^* = \frac{2}{(1+\lambda)}\frac{t}{D}\sigma_Y$$

Ejercicio 3.7

Las tres leyes de endurecimiento mencionadas en este ejercicio son expresiones usadas frecuentemente para aproximar la curva de endurecimiento medida experimentalmente, en el caso de materiales elasto-plásticos que experimentan endurecimiento isótropo.

En lo que sigue, se asume que el criterio de plastificación es von Mises y que σ y ε representan una solicitación mecánica uniaxial monótonamente creciente.

El motivo por el que en este ejercicio se pregunta por las derivadas de las funciones de endurecimiento ***H'*** y ***F'*** es que estas derivadas participan en las expresiones de la Teoría Incremental de la Plasticidad dentro de un denominador, por lo que es de interés saber si estas derivadas se anulan o si presentan algún tipo de singularidad.

- **<u>Estudio de la LEY de HOLLOMON</u>**:

Para ***H***, basta con asimilar $\sigma \to \sigma_Y$ y $\varepsilon^{pl} \to \bar{\varepsilon}^p$, de modo que:

$$\sigma_Y = H(\bar{\varepsilon}^p) = K\left(\bar{\varepsilon}^p\right)^n \qquad \textbf{(1)}$$

Para ***F***, es necesario integrar. Asumiendo tensión uniaxial, resulta:

$$W^p = \int \sigma d\bar{\varepsilon}^p = \int \sigma_Y d\bar{\varepsilon}^p = \int K(\bar{\varepsilon}^p)^n d\bar{\varepsilon}^p = \frac{K}{n+1}\left(\bar{\varepsilon}^p\right)^{n+1}$$

De donde:
$$\bar{\varepsilon}^p = \left\{\frac{(n+1)W^p}{K}\right\}^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \qquad \textbf{(2)}$$

Sustituyendo **(2)** en **(1)**:
$$\sigma_Y = F(W^p) = K\left\{\frac{(n+1)W^p}{K}\right\}^{\left(\frac{n}{n+1}\right)} \qquad \textbf{(3)}$$

Derivadas de ***F*** y ***H*** en el origen, considerando que $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{n} \leq \mathbf{1}$:

-- Hipótesis de "strain hardening": $\frac{d\sigma_Y}{d\bar{\varepsilon}^p} = H'(\bar{\varepsilon}^p) = nK\left(\varepsilon^{pl}\right)^{n-1} = \frac{nK}{\left(\bar{\varepsilon}^{pl}\right)^{1-n}}$

$$\therefore \text{ Si } \bar{\varepsilon}^p = 0 \text{ entonces } \frac{d\sigma_Y}{d\bar{\varepsilon}^p} \to +\infty$$

¡¡¡ Pendiente de la curva de endurecimiento no está definida en $\bar{\varepsilon}^p = 0$!!!

-- Hipótesis de "work hardening": $\frac{d\sigma_Y}{dW^p} = F'(W^p) = n\left\{\frac{K}{(n+1)W^p}\right\}^{\left(\frac{1}{n+1}\right)}$

$$\therefore \text{ Al igual que antes, si } W^p = 0 \text{ entonces } \frac{d\sigma_Y}{dW^p} \to +\infty$$

¡¡¡ Pendiente de la curva de endurecimiento no está definida en $W^p = 0$!!!

<u>Comentario sobre la Ley de Hollomon</u>:

En esta ley se tiene que $\bar{\varepsilon}^p = 0$ sólo cuando $\sigma = \sigma_Y = 0$. De la expresión **(1)**, si $\sigma \neq 0$ entonces, necesariamente $\bar{\varepsilon}^p \neq 0$ incluso si σ es muy pequeño:

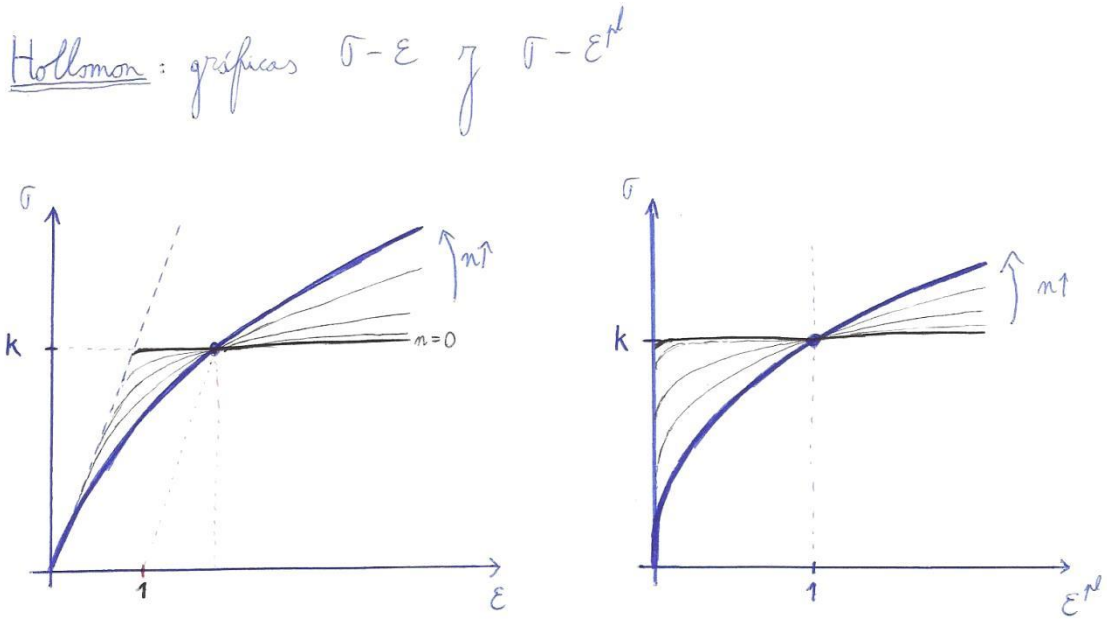
Como resultado, el modelo empírico de Hollomon predice la formación de deformación plástica incluso para valores muy pequeños de tensión. En la práctica, para valores pequeños de tensión, la deformación plástica, aunque no-nula, es mucho menor que la elástica.

Es por esto que puede decirse que en la ley de Hollomon, ***no hay*** un ***límite elástico inicial bien definido***.

Para valores más altos de tensión, sin embargo, la deformación plástica predicha por Hollomon se hace progresivamente más alta, hasta hacerse mucho mayor que la elástica.

Por último, si el exponente de endurecimiento ***n*** es ***n* = 0**, entonces es evidente, de **(1)**, que el límite elástico es constante e igual a ***K*** (independiente de la deformación plástica) y se dice, por tanto, que el material es ***perfectamente plástico*** (es decir, ***no*** endurece por deformación).

Todo lo anterior se aprecia en la siguiente figura:



- **<u>Estudio de la LEY de LÜDWIK</u>**:

Para ***H***, basta con asimilar $\sigma \rightarrow \sigma_Y$ y $\varepsilon^{pl} \rightarrow \bar{\varepsilon}^p$, de modo que:

$$\sigma_Y = H(\bar{\varepsilon}^p) = A + K(\bar{\varepsilon}^p)^n \qquad \textbf{(4)}$$

Para ***F***, es necesario integrar. Asumiendo tensión uniaxial, resulta:

$$W^p = \int \sigma d\bar{\varepsilon}^p = \int \sigma_Y d\bar{\varepsilon}^p = \int [A + K(\bar{\varepsilon}^p)^n] d\bar{\varepsilon}^p = A\bar{\varepsilon}^p + \frac{K}{n+1}(\bar{\varepsilon}^p)^{n+1} \qquad \textbf{(5)}$$

A diferencia del caso anterior, en Lüdwik no podemos despejar $\bar{\varepsilon}^p$ en función de W^p. No podemos, por tanto, introducir esto en (4), tal como habíamos hecho antes con Hollomon para expresar la función $\sigma_Y = F(W^p)$.

Por tanto, la relación $\sigma_Y = F(W^p)$ sólo puede ser expresada recursivamente en forma de una tabla de valores experimentales, a partir de $\sigma_Y = H(\bar{\varepsilon}^p)$.

<u>Derivadas de ***F*** y ***H*** en el origen, considerando que</u> $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{n} \leq \mathbf{1}$:

-- Hipótesis de "strain hardening": La derivada de ***H*** en el origen **sí** puede hallarse en Lüdwik, y es exactamente la misma que en el caso Hollomon:

$$\frac{d\sigma_Y}{d\bar{\varepsilon}^p} = H'(\bar{\varepsilon}^p) = nK(\bar{\varepsilon}^p)^{n-1} = \frac{nK}{(\bar{\varepsilon}^p)^{1-n}} \qquad \textbf{(6)}$$

$$\therefore \text{ Si } \bar{\varepsilon}^p = 0 \text{ entonces } \frac{d\sigma_Y}{d\bar{\varepsilon}^p} \to +\infty$$

¡¡¡ Pendiente de la curva de endurecimiento no está definida en $\bar{\varepsilon}^p = 0$!!!

-- Hipótesis de "work hardening": Aunque, como ya se ha indicado, no puede obtenerse una función explícita para ***F*** en la función $\sigma_Y = F(W^p)$, sí es posible obtener su derivada utilizando la "regla de la cadena".

$$F'(W^p) = \frac{d\sigma_Y}{dW^p} = \frac{d\sigma_Y}{d\bar{\varepsilon}^p}\frac{d\bar{\varepsilon}^p}{dW^p} = H'(\bar{\varepsilon}^p)\frac{d\bar{\varepsilon}^p}{dW^p}$$

El término $H'(\bar{\varepsilon}^p)$ ya se ha determinado en **(6)**, mientras que $\frac{d\bar{\varepsilon}^p}{dW^p}$ puede determinarse tomando derivadas con respecto a W^p a ambos lados de **(5)**, de lo que se obtiene:

$$F'(W^p) = \frac{d\sigma_Y}{dW^p} = \frac{nK}{(\bar{\varepsilon}^p)^{1-n}}\frac{1}{\left\{A + K(\bar{\varepsilon}^p)^n\right\}}$$

Finalmente, tomando en cuenta **(4)**, queda:

$$\boxed{F'(W^p) = \frac{d\sigma_Y}{dW^p} = \frac{nK}{\sigma_Y\,(\bar{\varepsilon}^p)^{1-n}}} \qquad \textbf{(7)}$$

<u>Comentario sobre la Ley de Lüdwik</u>:

En esta ley se tiene que $\bar{\varepsilon}^p = 0$ sólo cuando $\sigma = \sigma_Y = A$. En realidad, la expresión **(4)**, debe ser interpretada como:

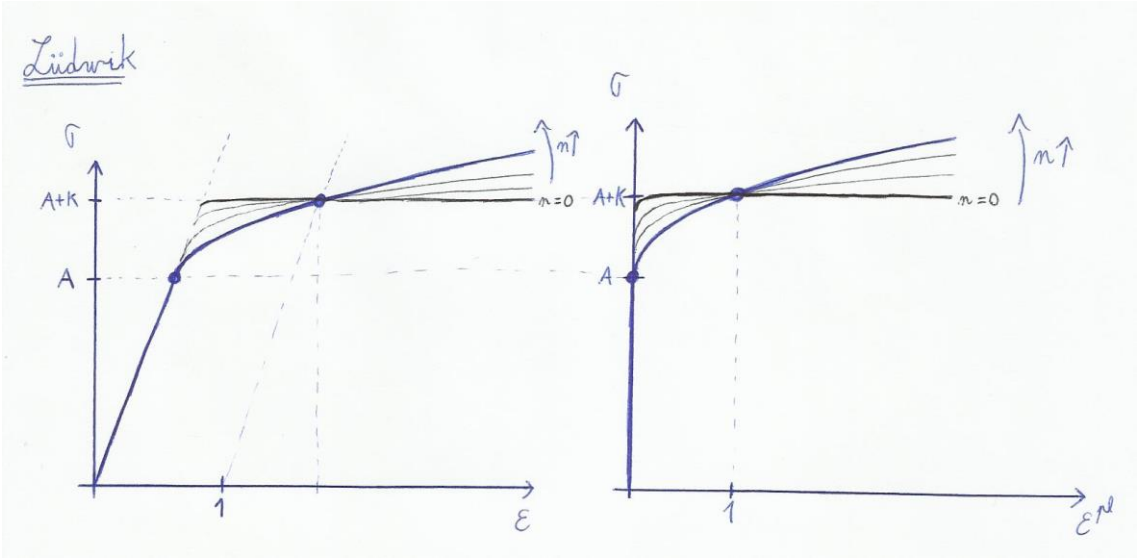
$$\sigma_Y = \begin{cases} A & si\ \varepsilon \le \dfrac{A}{E} \\ A + K(\bar{\varepsilon}^p)^n & si\ \varepsilon \ge \dfrac{A}{E} \end{cases}$$

Por tanto, en un *ensayo controlado en deformación* en el que la deformación es monótonamente creciente, el modelo empírico de Lüdwik predice la formación de deformación plástica solamente ***a partir*** de un cierto valor de deformación, dado por ***A/E***.

Es por esto que puede decirse que en la ley de Lüdwik, ***sí hay*** un ***límite elástico inicial bien definido***, correspondiente a una tensión ***A***.

Al igual que en Hollomon, el material es ***perfectamente plástico*** para ***n*** = 0.

Todo lo anterior puede apreciarse en la figura siguiente:



- **<u>Estudio de la LEY de RAMBERG-OSGOOD</u>**:

En este caso, el modelo proporciona deformación en función de la tensión. Sin embargo, en la expresión básica dada en el enunciado para este modelo, se puede reconocer la descomposición aditiva clásica de la deformación para el caso uni-axial:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha\left(\frac{\sigma}{\sigma_t}\right)^n = \varepsilon^{el} + \varepsilon^{pl}$$

Para hallar ***H***, basta con asimilar, tal como antes, $\sigma \to \sigma_Y$ y $\varepsilon^{pl} \to \bar{\varepsilon}^p$. Así, es directo verificar que:

$$\sigma_Y = H(\bar{\varepsilon}^p) = \sigma_t\left(\frac{\bar{\varepsilon}^p}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n}} \qquad \textbf{(8)}$$

Para hallar ***F***, hay que integrar $W^p = \int \sigma d\bar{\varepsilon}^p = \int \sigma_Y d\bar{\varepsilon}^p = \int \sigma_t\left(\frac{\bar{\varepsilon}^p}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n}} d\bar{\varepsilon}^p = \alpha\sigma_t \frac{n}{n+1}\left(\frac{\bar{\varepsilon}^p}{\alpha}\right)^{\left(\frac{n+1}{n}\right)}$

De donde $\frac{\bar{\varepsilon}^p}{\alpha} = \left(\frac{n+1}{n}\frac{W^p}{\alpha\sigma_t}\right)^{\left(\frac{n}{n+1}\right)}$ que, sustituyendo en **(8)**, resulta en:

$$\sigma_Y = F(W^p) = \sigma_t\left(\frac{n+1}{n}\frac{W^p}{\alpha\sigma_t}\right)^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \qquad \textbf{(9)}$$

<u>Derivadas de ***F*** y ***H*** en el origen, considerando que</u> $\boldsymbol{n \geq 1}$:

-- Hipótesis de "strain hardening": $\frac{d\sigma_Y}{d\bar{\varepsilon}^p} = H'(\bar{\varepsilon}^p) = \frac{\sigma_t}{n\alpha}\left(\frac{\bar{\varepsilon}^p}{\alpha}\right)^{\frac{1-n}{n}} = \frac{\sigma_t}{n\alpha}\left(\frac{\alpha}{\bar{\varepsilon}^p}\right)^{\frac{n-1}{n}}$

$$\therefore \text{Si } \bar{\varepsilon}^p = 0 \text{ entonces } \frac{d\sigma_Y}{d\bar{\varepsilon}^p} \to +\infty$$

¡¡¡ Pendiente de la curva de endurecimiento no está definida en $\bar{\varepsilon}^p = 0$!!!

-- Hipótesis de "work hardening": $\frac{d\sigma_Y}{dW^p} = F'(W^p) = \frac{1}{n\alpha}\left(\frac{\alpha n}{n+1}\frac{\sigma_t}{W^p}\right)^{\left(\frac{n}{n+1}\right)}$

$\therefore$ Al igual que antes, si $W^p = 0$ entonces $\frac{d\sigma_Y}{dW^p} \to \infty$

¡¡¡ Pendiente de la curva de endurecimiento no está definida en $W^p = 0$!!!

<u>Comentario sobre la Ley de Ramberg-Osgood</u>:

En esta ley se tiene que $\bar{\varepsilon}^p = 0$ sólo cuando $\sigma = \sigma_Y = 0$. De la expresión **(8)**, si $\sigma \neq 0$ entonces, necesariamente $\bar{\varepsilon}^p \neq 0$ incluso si σ es muy pequeño:

El modelo empírico de Ramberg-Osgood predice la formación de deformación plástica incluso para valores muy pequeños de tensión, aunque en la práctica, para valores pequeños de tensión, la deformación plástica, aunque no-nula, es mucho menor que la elástica.

Es por esto que puede decirse que, al igual que ocurría en la ley de Hollomon, en la ley de Ramberg-Osgood ***no hay*** un ***límite elástico inicial bien definido***.

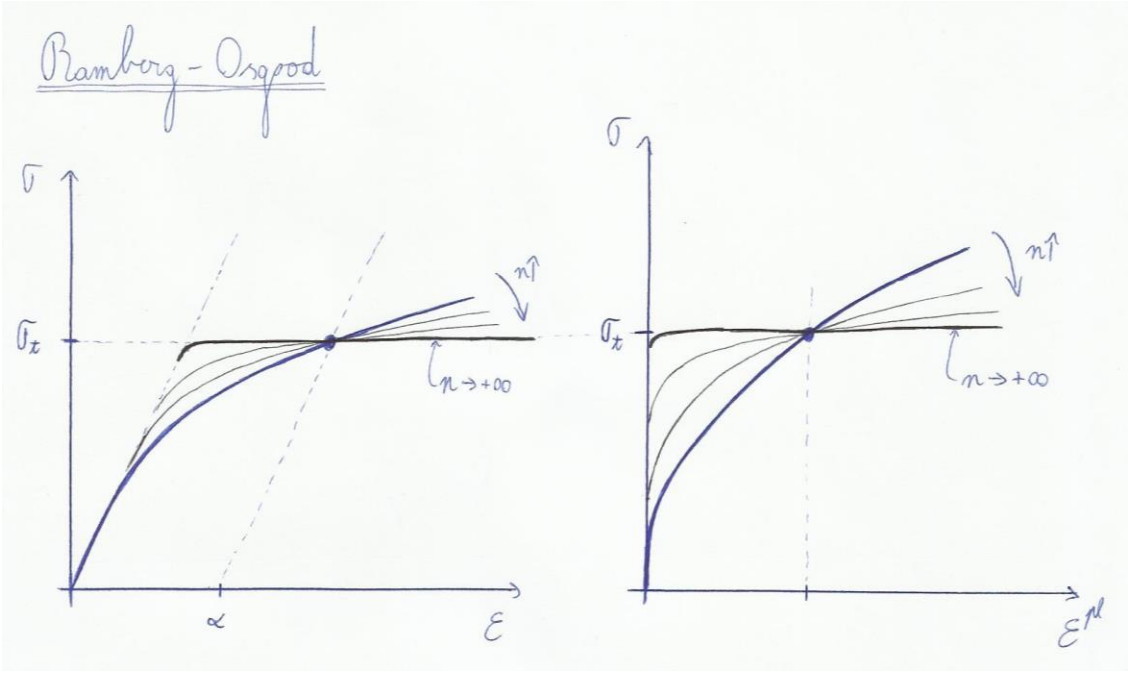
Ahora bien, en muchos casos, la Ley de Ramberg-Osgood es adecuada para describir el endurecimiento de materiales que muestran un ***codo suave*** de inicio de plastificación. En tales casos, es conveniente fijar para $\boldsymbol{\alpha}$, el valor convencional del 0,2% (α = 0,002)

La razón es que, observando la expresión **(8)**, es evidente que $\boldsymbol{\alpha}$ es el valor de deformación plástica ***justo en el instante*** en el que la tensión $\boldsymbol{\sigma}$ alcanza el valor del parámetro $\boldsymbol{\sigma_t}$. Es por esto que el parámetro $\boldsymbol{\sigma_t}$ puede interpretarse como el ***límite elástico convencional a la deformación plástica*** $\boldsymbol{\alpha}$.

Para valores progresivamente más altos de tensión, la deformación plástica predicha por Ramberg-Osgood se hace progresivamente más alta, hasta hacerse, eventualmente, mucho mayor que la deformación elástica (al igual que ocurría antes en Hollomon).

Por último, a diferencia de los dos modelos anteriores, Ramberg-Osgood ***no puede*** describir exactamente un material ***perfectamente plástico***. Aunque se requiere de $\boldsymbol{n \to +\infty}$ para que este modelo reproduzca plasticidad perfecta, valores ***muy altos*** (50, 100, etc.) del exponente de endurecimiento pueden aproximar este comportamiento razonablemente bien.

Lo anterior puede observarse en la figura siguiente:



Ejercicio 3.9

- Tensor de tensiones en cortadura pura: $\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

  Puesto que $tr(\sigma) = \sigma_{ii} = 0$, ocurre que toda la tensión es desviadora: $s_{ij} = \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Tensor de deformaciones en cortadura pura: $\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma/2 & 0 \\ \gamma/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

  Puesto que $tr(\varepsilon) = \varepsilon^{vol} = 0$, toda la deformación es desviadora: $e_{ij} = \varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma/2 & 0 \\ \gamma/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Descomposición aditiva de la deformación en sus componentes elástica y plástica:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & \gamma/2 & 0 \\ \gamma/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^e/2 & 0 \\ \gamma^e/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \gamma^p/2 & 0 \\ \gamma^p/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Donde la componente elás. se relaciona con la tensión mediante la Ley de Hooke: $\gamma^e = \tau/G$

- Tensión equivalente y la deformación plástica equivalente:

$$\begin{cases} q = \sqrt{\dfrac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} = \sqrt{3} \cdot \tau = \sigma_Y \quad \text{(debido al criterio de von Mises)} \\ d\bar{\varepsilon}^p = \sqrt{\dfrac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p} = \sqrt{\dfrac{2}{3} \cdot \left\{ \left(\dfrac{d\gamma^p}{2} \right)^2 + \left(\dfrac{d\gamma^p}{2} \right)^2 \right\}} = \left| \dfrac{d\gamma_p}{\sqrt{3}} \right| \Rightarrow \bar{\varepsilon}^p = \dfrac{\gamma_p}{\sqrt{3}} \quad (\text{suponiendo } \gamma^p \geq 0) \end{cases}$$

- Sustituyendo en la función de endurecimiento señalada en el enunciado, y que fue obtenida a tracción, se tiene:

$$\sigma_Y = \sigma_{Y0} + A\bar{\varepsilon}^p \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3} \cdot \tau = \sigma_{Y0} + A \cdot \frac{\gamma_p}{\sqrt{3}}$$

- Teniendo en cuenta que $\gamma_p = \gamma - \gamma_e = \gamma - \dfrac{\tau}{G}$, sustituyendo en la expresión anterior, queda:

$$\sqrt{3}\cdot\tau = \sigma_{Y0} + A\cdot\left(\frac{G\gamma - \tau}{\sqrt{3}\cdot G}\right)$$

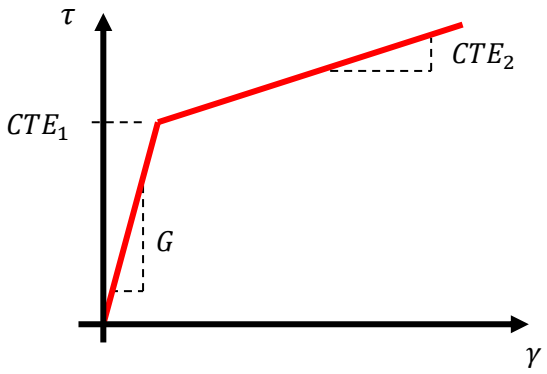
Por tanto, la curva tensión – deformación en cortadura pura queda gobernada por las siguientes 2 expresiones (que se representan en la figura):

$$\tau = \underbrace{\left(\frac{\sqrt{3}\cdot G}{3G+A}\sigma_{Y0}\right)}_{CTE_1} + \underbrace{\left(\frac{GA}{3G+A}\right)}_{CTE_2}\cdot\gamma$$

(en la rama elasto-plástica)

$$\tau = G\cdot\gamma$$

(en la rama inicial elástica)



Ejercicio 3.12

DEFINICIONES PREVIAS:

Recordando que $R_0 = 300\ mm$, se definen:

$R_1 \equiv radio\ del\ tubo\ cuando\ P = P^*$

$\Delta R_1 \equiv variación\ del\ radio\ cuando\ P\ crece\ de\ P = 0\ hasta\ P = P^*$
$= R_1 - R_0$

$\Delta R_2 \equiv variación\ total\ del\ radio\ cuando\ P\ ha\ crecido\ hasta\ P = 1{,}01\ P^*$
$= R_2 - R_0$

PASO 1.: establecer el estado tensional en términos de P (la presión interior del tubo).

En régimen elástico se puede usar la fórmula de tubos, de la Resistencia de Materiales, por tanto:

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = \tau_{rz} = 0 \quad ; \quad \sigma_\theta = \frac{R}{e}P = 30P \quad ; \quad \sigma_r \approx -P \quad ; \quad \sigma_z = ?$$

Como $|\sigma_r| \approx |P| \ll |\sigma_\theta| = 30|P|$, es posible aproximar $\sigma_r \approx 0$ sin cometer gran error en la expresión de von Mises.

Para determinar σ_z se recurrirá a la Teoría de Elasticidad: como la longitud no cambia (extremos empotrados), se tiene que $\varepsilon_z = 0$. La Ley de Hooke indica que

$$\varepsilon_z = 0 = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_r + \sigma_\theta) \ \Rightarrow\ \sigma_z = \nu\,\sigma_\theta = 9P$$

Por tanto, el tensor de tensiones es:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ & \sigma_\theta & \tau_{\theta z} \\ sim & & \sigma_z \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30P & 0 \\ 0 & 0 & 9P \end{bmatrix}$$

De lo anterior se deduce que las direcciones *radial*, *tangencial* y *axial* son direcciones principales, por lo que:

$$\sigma_1 = 30P \quad ; \quad \sigma_2 = 9P \quad ; \quad \sigma_3 = 0$$

La **presión** hidrostática es: $p = -\overline{\sigma} = -\frac{1}{3}(30P + 9P) = -13P$

El **tensor desviador** es:

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\sigma} + p\,\boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30P & 0 \\ 0 & 0 & 9P \end{bmatrix} + (-13P)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} P$$

La **tensión equivalente de von Mises** se puede calcular usando cualquiera de las fórmulas del formulario (ver apartado 3.3, página 32). Por ejemplo:

$$q = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} = \left\{ \sqrt{\frac{3}{2}\left[(-13)^2 + (17)^2 + (-4)^2\right]} \right\} \cdot P = 26{,}66\, P$$

PASO 2.: establecer el valor de P^* (la presión interior del tubo en el instante de plastificación inicial).

Cuando la presión interior P alcanza el valor $P = P^*$, se satisface el criterio de plastificación:

$$q = \sigma_Y = 400\ MPa = 26{,}66\, P^* \quad \Rightarrow \quad P^* = 15\ MPa$$

En este instante en que $P^* = 15\ MPa$, se tiene que $\boldsymbol{\sigma}$, p y $\boldsymbol{s}$ valen, respectivamente:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 450 & 0 \\ 0 & 0 & 135 \end{bmatrix} MPa \quad ; \quad p = -195\ MPa \quad ; \quad \boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} -195 & 0 & 0 \\ 0 & 255 & 0 \\ 0 & 0 & -60 \end{bmatrix} MPa$$

PASO 3.: establecer la *variación* del radio del tubo entre el estado inicial *descargado* (con $P = 0$) y el instante de plastificación inicial en que $P = P^* = 15\ MPa$.

Recordamos que ε_θ se define como:

$$\varepsilon_\theta = \frac{variación\ del\ perímetro\ del\ tubo}{perímetro\ inicial} = \frac{2\pi(R_0 + \Delta R_1) - 2\pi R_0}{2\pi R_0} = \frac{\Delta R_1}{R_0}$$

En el instante de plastificación inicial, aún es válida la Ley de Hooke, por lo que la deformación en el sentido tangencial (o circunferencial) es:

$$\varepsilon_\theta = \frac{\sigma_\theta}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_r + \sigma_z) = \frac{27{,}3 \cdot 15\ MPa}{210000\ MPa} = 1{,}95 \cdot 10^{-3} = \frac{\Delta R_1}{R_0}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta R_1 = 1{,}95\ 10^{-3} \cdot R_0 = 0{,}59\ mm$$

PASO 4.: establecer la *variación* del estado tensional cuando P aumenta un 1% desde $P = P^*$ hasta $P = 1{,}01\ P^*$.

Las componentes del nuevo tensor de tensiones se expresan del siguiente modo:

$\sigma_\theta^{nuevo} = 1{,}01 \cdot 30\ P^* = 454{,}5\ MPa$ pues sigue siendo válida la fórmula para σ_θ de la Resistencia de Materiales.

$\sigma_r^{nuevo} = 0$ pues sigue siendo válida la aproximación de *pequeño espesor*.

$\sigma_z^{nuevo} = ?$ $\rightarrow$ ya no puede obtenerse de la Teoría de la Elasticidad con $\varepsilon_z = 0$, pues para $P > P^*$ hay deformación plástica y la Ley de Hooke ya no es suficiente.

Por lo tanto: $\sigma_z^{nuevo} = \sigma_z^* + \Delta\sigma_z = 135 + \Delta\sigma_z$, con $\Delta\sigma_z$ por determinar.

> Como existe una **restricción cinemática** que condiciona una de las deformaciones (en este caso, $\varepsilon_z = 0$), es evidente que NO todas las componentes del tensor de tensiones cambian en la misma proporción:
>
> $\Rightarrow$ La solicitación mecánica NO es de tipo "carga proporcional".
>
> $\Rightarrow$ Queda **descartado** el uso de la **Teoría Total** de la Plasticidad para el subsiguiente estudio de las deformaciones, debiendo recurrirse **obligatoriamente** a la **Teoría Incremental**.

Así, en la **nueva condición**:

$$\boldsymbol{\sigma}^{nuevo} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 454{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 135 + \Delta\sigma_z \end{bmatrix} MPa \quad ; \quad p^{nuevo} = -\frac{454{,}5 + 135 + \Delta\sigma_z}{3} = -196{,}5 - \frac{\Delta\sigma_z}{3}$$

De estos valores, el **nuevo tensor desviador** queda:

$$\boldsymbol{s}^{nuevo} = \boldsymbol{\sigma}^{nuevo} + p^{nuevo}\boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} -\left(196{,}5 + \frac{\Delta\sigma_z}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 258 - \frac{\Delta\sigma_z}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -61{,}5 + \frac{2}{3}\Delta\sigma_z \end{bmatrix}$$

La **nueva tensión de von Mises** es:

$$q^{nueva} = \sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}} = \sqrt{\frac{3}{2}\left[\left(196{,}5 + \frac{\Delta\sigma_z}{3}\right)^2 + \left(258 - \frac{\Delta\sigma_z}{3}\right)^2 + \left(-61{,}5 + \frac{2}{3}\Delta\sigma_z\right)^2\right]}$$

$$= \sqrt{A + B \cdot \Delta\sigma_z + C \cdot (\Delta\sigma_z)^2}$$

Donde:

$A = 157856{,}18 \ [MPa]^2$

$B = -184{,}5 \quad [MPa]$

$C = 1 \quad [adimensinal]$

Variaciones entre los estados $P = P^*$ y $P = 1{,}01\ P^*$:

- $\Delta p = p^{nuevo} - (-195) = -\left(196{,}5 + \frac{\Delta\sigma_z}{3}\right) + 195 = -1{,}5 - \frac{\Delta\sigma_z}{3}$
- $\Delta q = q^{nueva} - 400 = \sqrt{A + B \cdot \Delta\sigma_z + C \cdot (\Delta\sigma_z)^2} - 400$

- $\Delta \boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}^{nuevo} - \boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} -\left(1{,}5 + \frac{\Delta\sigma_z}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 3 - \frac{\Delta\sigma_z}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1{,}5 + \frac{2}{3}\Delta\sigma_z \end{bmatrix}$

PASO 5.: cálculo de las *constantes elásticas* que serán necesarias más adelante (módulo de compresibilidad K y módulo de cortadura G).

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} = 175000\ MPa \quad ; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 80769{,}2\ MPa$$

PASO 6.: análisis del *incremento de deformación* en el paso desde $P = P^*$ hasta $P = 1{,}01\ P^*$.

- Toda la variación de volumen es elástica:

$$\Rightarrow \quad \Delta\varepsilon^{vol} = -\frac{1}{K}\Delta p = 5{,}71 \cdot 10^{-6}\left\{1{,}5 + \frac{\Delta\sigma_z}{3}\right\}$$

- De la Ley de Endurecimiento y del Criterio de von Mises:

$$q = 650\left(\overline{\varepsilon}^{pl}\right)^{0{,}25} = H\left(\overline{\varepsilon}^{pl}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial q}{\partial \overline{\varepsilon}^{pl}} = H'\left(\overline{\varepsilon}^{pl}\right) = 162{,}5\left(\overline{\varepsilon}^{pl}\right)^{-0{,}75} = 162{,}5\left(\frac{q}{650}\right)^{-3}$$

- De la Teoría Incremental de la Plasticidad, aplicada a la componente "z", se tiene:

$$\Delta\varepsilon_z = \frac{1}{3}\Delta\varepsilon^{vol} + \frac{\Delta s_z}{2G} + \frac{3}{2}\frac{\Delta q}{q\ H'\left(\overline{\varepsilon}^{pl}\right)} s_z$$

$$= \frac{5{,}71 \cdot 10^{-6}}{3}\left\{1{,}5 + \frac{\Delta\sigma_z}{3}\right\} + 6{,}19 \cdot 10^{-6}\left\{-1{,}5 + \frac{2}{3}\Delta\sigma_z\right\} + \frac{3}{2}\frac{\left\{\sqrt{A + B\cdot\Delta\sigma_z + C\cdot(\Delta\sigma_z)^2} - 400\right\}}{400 \cdot 162{,}5\left(\frac{400}{650}\right)^{-3}}(-60)$$

Nota: debe observarse que las cantidades *totales* o *instantáneas* (q, s_z y $\overline{\varepsilon}^{pl}$) se han evaluado, por sencillez, en el estado $P = P^*$ y no en el estado $P = 1{,}01 \cdot P^*$.

En otras palabras, se ha usado un método *explícito* en lugar de uno *implícito* (para más detalles sobre esto, ver apartado 3.7, páginas 37-38).

De la expresión anterior para $\Delta\varepsilon_z$ en conjunto con la condición $\Delta\varepsilon_z = 0$ (extremos empotrados), al ordenar términos y factorizar adecuadamente se obtiene una ecuación de 2º grado en incógnita $\Delta\sigma_z$, la cual puede resolverse para obtener 2 soluciones:

$$\text{Sol. 1}: \ \Delta\sigma_z = 184{,}3\ MPa \quad ; \quad \text{Sol. 2}: \ \Delta\sigma_z = -11{,}5\ MPa$$

Sólo **UNA de ellas** tiene sentido físico, ¿cuál?

A partir de $\Delta\sigma_z$ se obtiene todos los demás incrementos, como Δq, Δp, Δs_z y Δs_θ.

Sol. 1 $\Rightarrow$ $\Delta q = -2{,}7\ MPa$; $\Delta p = -62{,}9\ MPa$; $\Delta s_z = 121{,}4\ MPa$; $\Delta s_\theta = -58{,}4\ MPa$

Sol. 2 $\Rightarrow$ $\Delta q = +0{,}2\ MPa$; $\Delta p = 2{,}35\ MPa$; $\Delta s_z = -9{,}2\ MPa$; $\Delta s_\theta = -9{,}2\ MPa$

Se observa lo siguiente:

La solución 1 NO tiene sentido físico, puesto que, según ella, a un *incremento* de la presión interior desde P^* hasta $1{,}01P^*$, correspondería un *decremento* en la tensión equivalente de von Mises **!!!**

$\Rightarrow$ La solución **correcta** es la **2**: $\Delta\sigma_z = -11{,}5\ MPa$

En este caso: $\Delta q = 0{,}2\ MPa > 0 \Rightarrow$ estamos en condición de carga.

- De la Teoría Incremental de la Plasticidad, aplicada ahora a la componente "θ", se tiene:

$$\Delta\varepsilon_\theta = \frac{1}{3}\Delta\varepsilon^{vol} + \frac{\Delta s_\theta}{2G} + \frac{3}{2}\frac{\Delta q}{q\,H'\left(\bar{\varepsilon}^{pl}\right)}s_\theta$$

$$= \frac{5{,}71\cdot 10^{-6}}{3}\{2{,}35\} + 6{,}19\cdot 10^{-6}\{-9{,}2\} + \frac{3}{2}\frac{0{,}2}{400\cdot 162{,}5\left(\frac{400}{650}\right)^{-3}}\{255\}$$

$$= 2{,}218\cdot 10^{-4}$$

- Actualización de la deformación circunferencial ε_θ al estado $P = 1{,}01\cdot P^*$:

$$\varepsilon_\theta^{nuevo} = \varepsilon_\theta + \Delta\varepsilon_\theta = 1{,}95\cdot 10^{-3} + 2{,}218\cdot 10^{-4} = 2{,}17\cdot 10^{-3}$$

donde debe recordarse que $\varepsilon_\theta = 1{,}95\cdot 10^{-3}$ era la deformación que se había alcanzado justo en el instante de plastificación inicial, cuando $P = P^*$ (consultar el PASO 3).

- Finalmente, se obtiene la variación TOTAL del radio del tubo cuando $P = 1{,}01\cdot P^*$:

$$\varepsilon_\theta^{nuevo} = \frac{variación\ total\ del\ perímetro\ hasta\ P = 1{,}01\cdot P^*}{perímetro\ inicial}$$

$$= \frac{2\pi(R_0 + \Delta R_2) - 2\pi R_0}{2\pi R_0}$$

$$= \frac{\Delta R_2}{R_0} = 2{,}218\cdot 10^{-4}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta R_2 = \varepsilon_\theta^{nuevo}\cdot R_0 = 0{,}65\ mm$$

Comentario didáctico:

Como la medida de deformación que se está usando es la deformación ingenieril, debemos tener presente que los valores actuales (o instantáneos) de **deformación total** siempre deben estar referidos a la **longitud inicial** (en nuestro caso, R_0).

Es por esto que en los pasos 3 y 6 se obtuvo:

- PASO 3: $\varepsilon_\theta = \frac{\Delta R_1}{R_0} = \frac{R_1 - R_0}{R_0}$ cuando $P = P^*$
- PASO 6: $\varepsilon_\theta^{nuevo} = \frac{\Delta R_2}{R_0} = \frac{R_2 - R_0}{R_0}$ cuando $P = 1{,}01\ P^*$

Ejercicio 3.15

Parte (*a*)

En este caso hay un esfuerzo axil de compresión P y un momento torsor $M = 0{,}12P$. Por tanto, el tensor de tensiones tiene la forma siguiente:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_r & \sigma_{r\theta} & 0 \\ & \sigma_\theta & 0 \\ sim & & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ & 0 & 0 \\ sim & & \sigma_z \end{bmatrix} \quad donde \quad \sigma_z = \frac{P}{2\pi Re} \quad ; \quad \tau = \frac{M}{2\pi R^2 e} = \frac{0{,}12P}{2\pi R^2 e}$$

Nótese que: $P < 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_z < 0 \ , \ \tau < 0$

La presión hidrostática, la tensión desviadora y la tensión de von Mises son:

$$p = -\frac{\sigma_z}{3} = -\frac{P}{6\pi Re}$$

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\sigma} + p\boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} -\sigma_z/3 & \tau & 0 \\ & -\sigma_z/3 & 0 \\ sim & & 2\,\sigma_z/3 \end{bmatrix} = \frac{P}{2\pi Re} \begin{bmatrix} -1/3 & 0{,}12/R & 0 \\ & -1/3 & 0 \\ sim & & 2/3 \end{bmatrix}$$

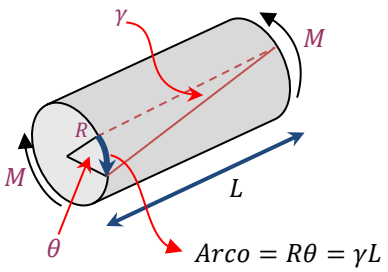
$$q = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau^2} = \frac{P}{2\pi Re} \sqrt{1 + \frac{0{,}0432}{R^2}}$$

Está claro que la solicitación mecánica es de tipo "*carga proporcional*", porque todas las cantidades tensionales quedan controladas por el factor escalar P.

En la condición de plastificación inicial, se tiene (para $e = 12\ mm$ y $R = 300\ mm$):

$$q = \sigma_Y = 2400 \frac{kg}{cm^2} \approx 240\ MPa \quad \Rightarrow \quad P = P^* = -\frac{2\pi Re \cdot 240}{\sqrt{1 + \frac{0{,}0432}{R^2}}} = -5429\ kN = -542{,}9\ Ton$$

Parte (*b*)



Si $\Delta > 0$ es el "*acortamiento*" del pilar y θ es el ángulo de torsión (en radianes), entonces:

$$\varepsilon_z = -\frac{\Delta}{L} < 0 \quad ; \quad \gamma_{r\theta} L = \theta R \quad con \quad \gamma_{r\theta} = 2\varepsilon_{r\theta} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{\theta R}{2L}$$

Como ya se ha indicado que hay carga proporcional, y como la carga P aumenta (sin descargas intermedias), tiene sentido recurrir a la teoría Total de la plasticidad.

Como, además se indica que pueden despreciarse las deformaciones elásticas, toda la deformación es plástica y, por tanto, desviadora!!! En esta condición, las ecuaciones de Hencky indican:

$$\varepsilon_{ij} \approx \varepsilon_{ij}^{pl} \approx e_{ij} = \psi s_{ij} \quad \forall\, i,j = x,y,z$$

Aplicado a las componentes rr, $\theta\theta$, zz y $r\theta$, se tiene:

$$\psi = \frac{e_r}{s_r} = \frac{e_\theta}{s_\theta} = \frac{e_z}{s_z} = \frac{e_{r\theta}}{s_{r\theta}}$$

De la última de estas igualdades, se deduce que:

$$-\frac{\Delta}{L s_z} = \frac{\theta R}{2L\,\tau} \quad \Rightarrow \quad \Delta = -\frac{R}{2}\frac{s_z}{\tau}\theta = C\,\theta \quad \text{con} \quad C = -2{,}5 \cdot 10^5\ [mm/rad]$$

Se observa que θ debe ser $\theta < 0$, puesto que $\Delta > 0$ es un "*acortamiento*".

Parte (*c*)

Sea $P^{**} = 1{,}1 \cdot P^*$. Como hay carga proporcional, todas las componentes del tensor de tensiones se "escalan" en un 10%.

$$q^{**} = 1{,}1 \cdot 240 = 265\ MPa$$

Para tensiones superiores al límite elástico, la deformación plástica equivalente se determina de la curva de endurecimiento. Por otro lado, como se ha despreciado la deformación elástica, resulta que la "*deformación desviadora equivalente*" $\overline{e}$ que se utiliza en la teoría total coincide con la "*deformación plástica equivalente*" $\overline{\varepsilon}^p = H^{-1}(\sigma_Y)$, que se puede escribir en términos de la tensión de von Mises como:

$$\overline{\varepsilon}^p = \overline{e} = \frac{q - 240}{1600} \quad \text{cuando} \quad q \ \text{se expresa en } MPa$$

Por tanto: $\quad q^{**} = 265\ MPa \quad \Rightarrow \quad \overline{e}^{**} = 0{,}0156$

Si se recuerda las ecuaciones de Hencky:

$$\psi = \frac{e_r}{s_r} = \frac{e_\theta}{s_\theta} = \frac{e_z}{s_z} = \frac{e_{r\theta}}{s_{r\theta}}\ ,$$

de la segunda de las cuatro igualdades, junto a l hecho de que $s_r = s_\theta$, se deduce:

$$e_r = e_\theta$$

Por esto, el tensor de deformaciones es de la forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} \approx \boldsymbol{\varepsilon}^p \approx \boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} e_r & e_{r\theta} & 0 \\ & e_r & 0 \\ sim & & e_z \end{bmatrix}$$

Como este tensor es "desviador" (esto es, tiene traza nula), necesariamente debe ocurrir que:

$$e_r = e_\theta = -\frac{1}{2}e_z$$

De la definición de *deformación desviadora equivalente*" $\overline{e}$, se tiene:

$$\overline{e} = \sqrt{\frac{2}{3}e_{ij}e_{ij}} = \cdots = \sqrt{e_z^2 + \frac{4}{3}e_{r\theta}^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta}{L}\right)^2 + \frac{4}{3}\left(\frac{\theta R}{2L}\right)^2} = 0{,}0156$$

Recordando que $\Delta = C\,\theta$, se obtiene:

$$\theta = \pm\frac{0{,}0156\,L}{\sqrt{C^2 + \frac{R^2}{3}}} \quad ; \quad \Delta = C\theta = \pm\frac{0{,}0156\,LC}{\sqrt{C^2 + \frac{R^2}{3}}}$$

La solución correcta tiene los signos que garantizan $\theta < 0$ y $\Delta > 0$. Esto es:

$$\theta = -1{,}87\ 10^{-4}\ [rad] \quad ; \quad \Delta = 46{,}8\ [mm]$$

Ejercicio 3.19

PARTE (1)

Se pide demostrar que $\sigma_x = \sigma_x(X) = k\left(\frac{1}{a+L} - \frac{1}{X}\right)$, sabiendo que las fuerzas de volumen están dadas por $\vec{f} = -\frac{k}{X^2}\vec{\imath}$, donde $\vec{\imath}$ es un vector unitario que apunta en la dirección positiva del eje X y donde, además: $a \leq X \leq a+L$ y $k = cte \geq 0$

Las ecuaciones de equilibrio interno para este caso estático en el que no hay aceleraciones, son las siguientes (consultar apuntes de clases del Tema 2 para más detalles):

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f} = 0$$

Particularizando esta ecuación diferencial vectorial al eje X, se tiene:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial X} - \frac{k}{X^2} = 0 \quad sujeta\ a\ la\ Condición\ de\ Contorno \quad \sigma_x(a+L) = 0$$

puesto que en $X = a + L$ hay una superficie libre.

Integrando, surge una constante C, cuyo valor se obtendrá de la Condición de Contorno:

$$\sigma_x(X) = -\frac{k}{X} + C$$

Donde:

$$\sigma_x(a+L) = 0 = -\frac{k}{a+L} + C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{k}{a+L}$$

Sustituyendo C en la solución anterior para $\sigma_x(X)$ y ordenando términos, se obtiene:

$$\sigma_x(X) = k\left(\frac{1}{a+L} - \frac{1}{X}\right) \quad \textit{que era lo que se quería demostrar !!}$$

PARTE (2)

- Condición de *contacto sin fricción* $\Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$
- Movimiento sin restricción en Z $\Rightarrow \sigma_z = 0$
- Ley de Hooke para estado elástico + condición $\varepsilon_y = 0$:

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_y = \nu\sigma_x = \nu k\left(\frac{1}{a+L} - \frac{1}{X}\right)$$

Por tanto:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_x \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & \nu & 0 \\ sim & & 0 \end{bmatrix} = k\left(\frac{1}{a+L} - \frac{1}{X}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & \nu & 0 \\ sim & & 0 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

PARTE (3)

- Tensión hidrostática:

$$p = -\frac{1}{3}\sigma_{ii} = -\frac{(1+\nu)}{3}\sigma_x = -\frac{k(1+\nu)}{3}\left\{\frac{1}{a+L} - \frac{1}{X}\right\} = p(X) \tag{2}$$

- Tensor de tensiones desviadoras:

$$s = \sigma + p\delta = \frac{1}{3}\sigma_x \begin{bmatrix} 2-\nu & 0 & 0 \\ & 2\nu-1 & 0 \\ sim & & -(1+\nu) \end{bmatrix} = \frac{k}{3}\left\{\frac{1}{a+L} - \frac{1}{X}\right\} \begin{bmatrix} 2-\nu & 0 & 0 \\ & 2\nu-1 & 0 \\ sim & & -(1+\nu) \end{bmatrix} \tag{3}$$

- Tensión eq. de von Mises:

$$q = \sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}} = k\sqrt{\nu^2-\nu+1}\left|\frac{1}{a+L} - \frac{1}{X}\right|$$

Nota: el valor absoluto es necesario ya que, en general: $\sqrt{a^2} = |a| \;\; \forall a \in \mathbb{R}$

En nuestro caso, se observa que $\frac{1}{a+L} - \frac{1}{X} \leq 0 \;\; \forall\, X \in [a, a+L]$ por lo que:

$$q = k\sqrt{\nu^2-\nu+1}\left\{\frac{1}{X} - \frac{1}{a+L}\right\} = 0.89\, k\left\{\frac{1}{X} - \frac{1}{a+L}\right\} = q(X) \tag{4}$$

Se observa que la función $q = q(X)$ es ***decreciente*** desde un ***valor positivo*** en $X = a$ hasta un valor ***nulo*** en $X = a + L$. Por tanto, la **posición** de la placa **más solicitada** desde el punto de vista de la tensión de von Mises es $X = a$

PARTE (4)

En el instante de plastificación inicial y en la posición $X = a$, se tiene que:

$$q = q^* = 0.89\, k^*\left\{\frac{1}{a} - \frac{1}{a+L}\right\} = \sigma_0 \quad \Rightarrow \quad k^* = \frac{a(a+L)}{0.89\, L}\sigma_0 = 134.8\, \sigma_0 = 40449.4\; [MPa \cdot mm]$$

PARTE (5)

Como el material aun es elástico en el instante en que $k = k^*$, la variación del espesor se puede obtener de la Ley de Hooke:

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{\nu(1+\nu)k^*}{E}\left\{\frac{1}{a+L} - \frac{1}{a}\right\} = 0.00173$$

Por lo tanto: $\Delta e = e_0 \cdot \varepsilon_z = 0.086\; mm$

PARTE (6)

Si $k = 1.02\, k^*$, el material entra en régimen elasto-plástico, con un endurecimiento gobernado por la Ley de Lüdwick, como indica el enunciado.

Sean σ_x^* , σ_y^* las componentes de $\boldsymbol{\sigma}$ justo en el instante de plastificación inicial. Analicemos ahora los ***incrementos*** de ***cada componente*** del tensor de tensiones:

- $\sigma_x^{nuevo} = \sigma_x^* + \Delta\sigma_x = 1.02\ \sigma_x^* \quad \Rightarrow \quad \Delta\sigma_x = 0.02\ \sigma_x^*$

  Esto es así porque la componente σ_x depende de la fuerza de volumen $\boldsymbol{f}$, hecho que no cambia cuando el material plastifica.

- $\sigma_y^{nuevo} = \sigma_y^* + \Delta\sigma_y$ donde, por ahora, debe considerarse a $\Delta\sigma_y$ como una incógnita.
- $\sigma_z^{nuevo} = \sigma_z^* = 0$ pues la condición de ***movimiento libre*** en dirección Z no ha cambiado.

> Es evidente que NO todas las componentes del tensor de tensiones se incrementan en 2%:
>
> $\Rightarrow$ La solicitación mecánica NO es de tipo "carga proporcional". Es decir:
>
> $$\boldsymbol{\sigma}^{nuevo} \neq 1.02\ \boldsymbol{\sigma}^*$$
>
> $\Rightarrow$ Queda **descartado** el uso de la **Teoría Total** de la Plasticidad para el subsiguiente estudio de las deformaciones, debiendo recurrirse **obligatoriamente** a la **Teoría Incremental**.

Como consecuencia de lo anterior, los incrementos de ***todas*** las ***variables relevantes*** para la Teoría Incremental quedarán expresados en función de $\Delta\sigma_y$, como se muestra a continuación:

Incremento en la tensión hidrostática:

$$\Delta p = -\frac{1}{3}\{\Delta\sigma_x + \Delta\sigma_y + 0\} = -\frac{1}{3}\{0.02\ \sigma_x^* + \Delta\sigma_y\} \tag{5}$$

Incremento en el tensor de tensiones desviadoras:

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{s} = \Delta\boldsymbol{\sigma} + \Delta p\ \boldsymbol{\delta} &= \begin{bmatrix} \Delta\sigma_x & 0 & 0 \\ & \Delta\sigma_y & 0 \\ sim & & 0 \end{bmatrix} + \Delta p \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ sim & & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0.04\ \sigma_x^* - \Delta\sigma_y & 0 & 0 \\ & -0.02\ \sigma_x^* + 2\Delta\sigma_y & 0 \\ sim & & -0.02\ \sigma_x^* - \Delta\sigma_y \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{6}$$

Nuevo valor del tensor desviador:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{s}^{nuevo} &= \boldsymbol{s}^* + \Delta\boldsymbol{s} \\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} \sigma_x^*\{2.04 - \nu\} - \Delta\sigma_y & 0 & 0 \\ & \sigma_x^*\{2\,\nu - 1.02\} + 2\Delta\sigma_y & 0 \\ sim & & -\sigma_x^*\{1.02 + \nu\} - \Delta\sigma_y \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{7}$$

Nuevo valor de la tensión de von Mises:

$$q^{nuevo} = \sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}^{nuevo}s_{ij}^{nuevo}} = \sqrt{\frac{5}{6}(\sigma_x^*)^2 + \frac{4.28}{6}\sigma_x^*\,\Delta\sigma_y + \frac{1}{2}(\Delta\sigma_y)^2} = q^{nuevo}(\Delta\sigma_y) \tag{8}$$

Incremento en la tensión de von Mises:

$$\Delta q = q^{nuevo} - q^* = q^{nuevo}(\Delta\sigma_y) - 300\ MPa \tag{9}$$

ESTRATEGIA: Para encontrar el valor hasta ahora desconocido de $\Delta\sigma_y$, debemos utilizar la **Teoría Incremental** en conjunto con alguna ***condición conocida*** para el incremento de deformación. En este problema particular, se sabe que $\Delta\varepsilon_y = 0$ pues todos los movimientos verticales están impedidos.

Por tanto:

$$\Delta\varepsilon_y = -\frac{1}{3K}\Delta p + \frac{1}{2G}\Delta s_y + \frac{3}{2}\frac{\Delta q}{q\,H'}s_y = 0 \qquad (10)$$

Para determinar $\Delta\sigma_y$ a partir de esta expresión existen 2 alternativas:

ALTERNATIVA 1: evaluar las variables totales q, H' y s_y en el ***instante inicial*** en que $k = k^*$ (este es el método explícito, ***más sencillo*** aritméticamente, pero menos preciso)

ALTERNATIVA 2: evaluar las variables totales q, H' y s_y en el ***instante final*** en que $k = 1.02\,k^*$ (este es el método implícito, más preciso, pero ***más complejo***; de hecho, ***requiere iteraciones***)

Se utiliza por simplicidad la **ALTERNATIVA 1**:

$$q = q^* = 300\ MPa \quad ; \quad s_y = s_y^* = \frac{2\nu - 1}{3}\sigma_x^* \quad ; \quad H' = ?$$

Determinación de H' a partir de la Ley de Endurecimiento:

$$\sigma_Y = q = H\left(\bar{\varepsilon}^p\right) = \sigma_{Y0} + A\left(\bar{\varepsilon}^p\right)^N \quad \Rightarrow \quad H' = AN\left(\bar{\varepsilon}^p\right)^{N-1} = AN\left(\frac{q - \sigma_{Y0}}{A}\right)^{(N-1)/N}$$

Es evidente que en el instante de plastificación inicial $k = k^*$ ocurre que $\bar{\varepsilon}^p = 0$

Como se tiene que $N < 1$ entonces:

$$\lim_{\bar{\varepsilon}^p \to 0} H'\left(\bar{\varepsilon}^p\right) = +\infty$$

Debido a esto:

$$\lim_{\bar{\varepsilon}^p \to 0}\left\{\frac{\Delta q}{q\,H'}s_x\right\} = \lim_{\bar{\varepsilon}^p \to 0}\left\{\frac{\Delta q}{q\,H'}s_y\right\} = \lim_{\bar{\varepsilon}^p \to 0}\left\{\frac{\Delta q}{q\,H'}s_z\right\} = 0 \quad \forall\, \Delta\sigma_y \in \mathbb{R}$$

Así, en el límite en que $\bar{\varepsilon}^p = 0$ la Teoría Incremental aplicada a la componente ε_y indica que

$$\Delta\varepsilon_y = 0 = -\frac{1}{3K}\Delta p + \frac{1}{2G}\Delta s_y + 0$$

Reemplazando las expresiones encontradas antes para Δp y para Δs_y, se tiene:

$$-\frac{1}{9K}\left\{-0.02\sigma_x^* - \Delta\sigma_y\right\} + \frac{1}{6G}\left\{-0.02\sigma_x^* + 2\Delta\sigma_y\right\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta\sigma_y = 0{,}01\left\{\frac{3K - 2G}{3K + G}\right\}\sigma_x^* = -1{,}89\ MPa$$

Habiendo determinado $\Delta\sigma_y$ puede ahora utilizarse la Teoría Incremental para la componente ε_z:

$$\varepsilon_z^{nuevo} = \varepsilon_z^* + \Delta\varepsilon_z = 0.00173 - \frac{1}{3K}\Delta p + \frac{1}{2G}\Delta s_z + \frac{3}{2}\frac{\Delta q}{q\,H'}s_z$$

$$= 0.00173 - \frac{1}{3K}\Delta p + \frac{1}{2G}\Delta s_z + 0$$

Reemplazando las expresiones antes encontradas para Δp y para Δs_z, se obtiene, ordenando términos:

$$\varepsilon_z^{nuevo} = 0.00173 + \frac{0.02\sigma_x^*}{2G}\frac{\left(1-\frac{3}{2}\frac{K}{G}\right)}{\left(1+3\frac{K}{G}\right)}$$

Donde:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} = 53\ GPa \quad ; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 27.3\ GPa \quad ; \quad \sigma_x^* = k^*\left(\frac{1}{a+L}-\frac{1}{a}\right) = -337.1\ MPa$$

Finalmente: $\varepsilon_z^{nuevo} = 0.00173 + 0.00003 = 0.00176 \quad \Rightarrow \quad \Delta e = e_0\varepsilon_z^{nuevo} = 0.088\ mm$

PARTE (7)

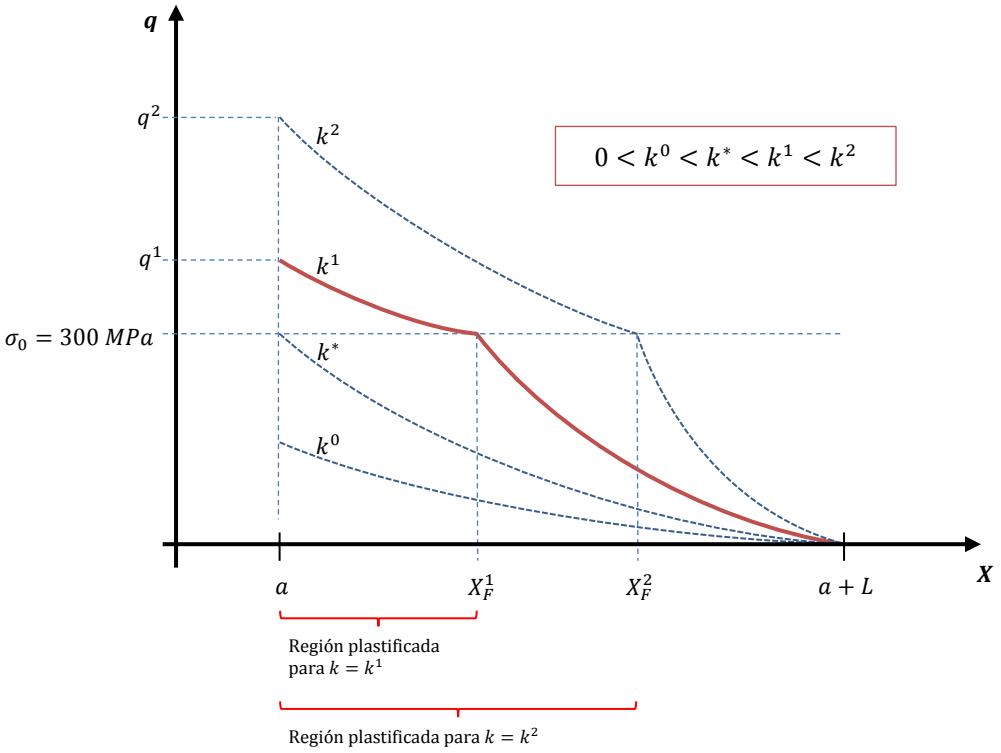
De la solución de la PARTE (3), se sabe que la tensión equivalente de von Mises depende de la posición de acuerdo a:

$$q(X) = 0.89\,k\left\{\frac{1}{X}-\frac{1}{a+L}\right\}$$

Para $X = a + L$ es evidente que $q(a+L) = 0$ sin importar el valor de k.

RESPUESTA: Por lo tanto, los puntos materiales que están justo en la superficie libre (arista derecha de la placa) NUNCA podrán plastificar.

Esto se puede interpretar gráficamente, en un perfil que muestre la distribución de la tensión de von Mises a lo largo de la placa en función del valor de k aplicado:



La posición $X = X_F$ que define la ***frontera*** entre la ***región plastificada*** y aquella que ***aún es elástica*** puede obtenerse del siguiente modo, en función del valor de k aplicado, en aquellos casos en los que $k \geq k^*$:

$$X_F = \left\{ \frac{\sigma_0}{0.89\,k} + \frac{1}{a+L} \right\}^{-1} \qquad \text{para} \qquad k \geq k^*$$

Del gráfico y de la expresión anterior, es evidente que la frontera de la región plastificada se mueve hacia la derecha conforme k aumenta. Sin embargo, es un movimiento asintótico, de modo que $X_F = a + L$ solamente si $k \to +\infty$.

Por lo tanto: **NO** existe $k \in \mathbb{R}$ suficientemente grande como para que la placa esté completamente plastificada.

<u>INFORMACIÓN ADICIONAL</u> (OPTATIVO, ya que no se pregunta esto en el enunciado)

Volvamos a considerar la **PARTE 6**. En ella se estableció que, debido a que las cantidades instantáneas q, H' y s_y se evaluaron al principio del incremento, se produjo el siguiente hecho:

$$\lim_{\bar{\varepsilon}^p \to 0} \left\{ \frac{\Delta q}{q\,H'} s_x \right\} = \lim_{\bar{\varepsilon}^p \to 0} \left\{ \frac{\Delta q}{q\,H'} s_y \right\} = \lim_{\bar{\varepsilon}^p \to 0} \left\{ \frac{\Delta q}{q\,H'} s_z \right\} = 0 \quad \forall\, \Delta\sigma_y \in \mathbb{R}$$

¿Qué implicación tuvo esto? Pues que, recordando las expresiones de la Teoría Incremental:

$$\Delta\varepsilon_x = -\frac{1}{3K}\Delta p + \frac{1}{2G}\Delta s_x + \Delta\varepsilon_x^{pl} = -\frac{1}{3K}\Delta p + \frac{1}{2G}\Delta s_x + 0$$

$$\Delta\varepsilon_y = -\frac{1}{3K}\Delta p + \frac{1}{2G}\Delta s_y + \Delta\varepsilon_y^{pl} = -\frac{1}{3K}\Delta p + \frac{1}{2G}\Delta s_y + 0$$

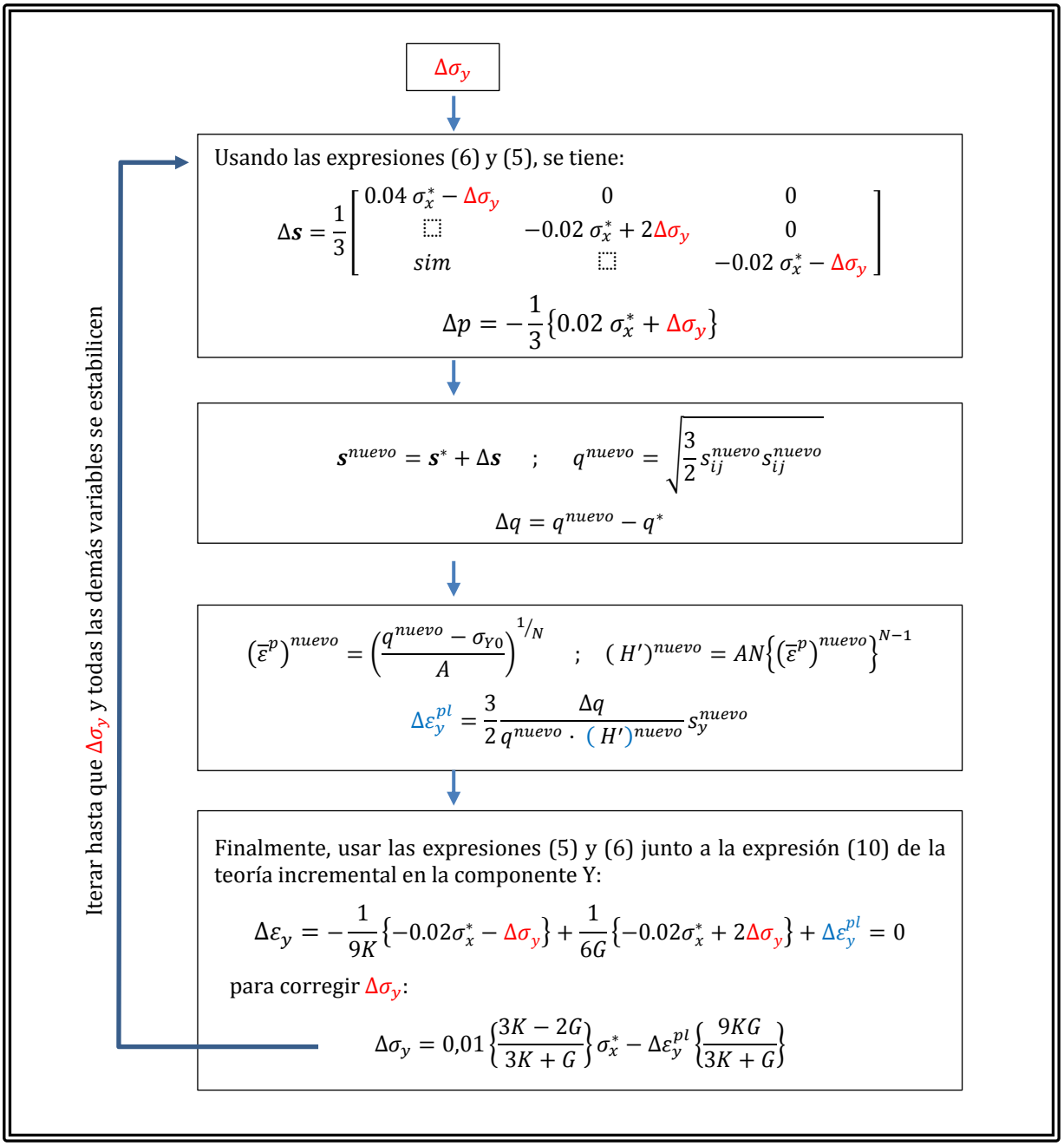
$$\Delta\varepsilon_z = -\frac{1}{3K}\Delta p + \frac{1}{2G}\Delta s_z + \Delta\varepsilon_z^{pl} = -\frac{1}{3K}\Delta p + \frac{1}{2G}\Delta s_z + 0$$

Es decir, aunque k aumentó con respecto al estado k^* (es decir, se superó el límite elástico inicial), el hecho es que la integración explícita utilizada predijo que NO hubo producción de deformación plástica !!!!

Por lo tanto, el resultado de la **PARTE 6** sólo puede interpretarse como una *<u>solución aproximada</u>*, la cual será tanto más precisa, cuanto más pequeño sea el incremento en k a partir de k^*.

¿Cómo podría mejorarse la estimación? -> Usando iteraciones:

Se describirá un método simplificado en el que el resultado de la integración explícita de la PARTE 6 será usada como <u>punto de partida</u> del esquema iterativo que se muestra en el siguiente recuadro:



EJEMPLO DE USO DEL ESQUEMA ITERATIVO

En el caso de este ejercicio, el incremento de 2% en k sobre k^* puede considerarse pequeño y, verdaderamente, el esquema iterativo no aporta nada ingenierilmente significativo.

Sin embargo, ¿ y si el incremento en k hubiese sido del 20% por sobre k^* ?

Aplicando el esquema iterativo descrito en el recuadro anterior, se obtiene la siguiente tabla (no aparecen todas las variables intermedias, por brevedad):

Iteración	$\Delta\sigma_y\ MPa$	$\Delta p\ ,\ MPa$	$q\ ,\ MPa$	$\Delta q\ ,\ MPa$	$H'\ ,MPa$
1	-18,8906	28,7702	361,4485	61,4485	476202,5
2	-21,1111	29,5104	360,9083	60,9083	588612,2
3	-20,6294	29,3498	361,0244	61,0244	562316,8
4	-20,7237	29,3812	361,0016	61,0016	567378,1
5	-20,7048	29,3749	361,0061	61,0061	566361,6
6	-20,7086	29,3762	361,0052	61,0052	566564,0
7	-20,7078	29,3759	361,0054	61,0054	566523,6
8	-20,7080	29,3760	361,0054	61,0054	566531,7
9	-20,7080	29,3760	361,0054	61,0054	566530,1
10	-20,7080	29,3760	361,0054	61,0054	566530,4
11	-20,7080	29,3760	361,0054	61,0054	566530,4
12	-20,7080	29,3760	361,0054	61,0054	566530,4

Se observa que las variables se estabilizan, por lo que después de 11 iteraciones, se ha alcanzado una estimación a la solución, basada ahora en integración implícita de la ecuación constitutiva.

Con estos valores estabilizados, se pueden calcular todas las variables deformacionales y, en particular, $\Delta\varepsilon_z$, que ahora sí tendrá un componente de incremento plástico:

$$\varepsilon_z^{nuevo} = \varepsilon_z^* + \Delta\varepsilon_z = 0{,}00173 - \frac{1}{3K}\Delta p + \frac{1}{2G}\Delta s_z + \frac{3}{2}\frac{\Delta q}{q\ H'}s_z = \cdots = 0{,}00216$$

COMENTARIO FINAL: Hemos obtenido el nuevo estado de deformaciones a partir de un estado inicial usando la teoría incremental junto a un método de integración implícito, e iterativo.

Sin embargo, ¿qué hubiera pasado si el incremento hubiese sido del 23% (o mayor) en lugar del 20%?

Puede comprobarse numéricamente que, en este caso, el esquema iterativo **NO se hubiese podido utilizar**, puesto que la raíz cuadrada que define a q hubiese tenido a un argumento **negativo**!!!!

- Por lo tanto, aunque la integración implícita mejora la solución con respecto a la integración explícita, esto NO QUIERE DECIR que ella permita resolver siempre incrementos ARBITRARIAMENTE grandes en la solicitación mecánica.
- En muchos casos, hay que subdividir el incremento de la solicitación mecánica en una sucesión de incrementos más pequeños, cada uno de los cuales ha de resolverse mediante iteraciones.
- El método iterativo que se describió en el recuadro es sólo uno, de muchos métodos posibles de integración. De hecho, existen otros métodos iterativos, más sofisticados, que convergen más rápidamente a la solución para el incremento de deformaciones plásticas.

Ejercicio 3.20

PARTE 1:

Para un tensor de tensiones de la forma $\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, se tiene:

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y) \quad ; \quad s_{ij} = \sigma_{ij} + p\delta_{ij} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2\sigma_x - \sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_x + 2\sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_x - \sigma_y \end{bmatrix}$$

De la tensión desviadora, se tiene:

$$q = \sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}} = \cdots = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2}$$

PARTE 2:

Si se tiene presente que en este ejercicio σ_y es <u>independiente</u> de X, la derivada de q con respecto a X usando la regla de la cadena conduce a lo siguiente:

$$q = (\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2)^{1/2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dq}{dX} = \frac{1}{2}(\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2)^{-1/2}\left(2\sigma_x\frac{d\sigma_x}{dX} - \sigma_y\frac{d\sigma_x}{dX}\right)$$

$$\frac{dq}{dX} = \frac{1}{2}q^{-1}\left(2\sigma_x\frac{d\sigma_x}{dX} - \sigma_y\frac{d\sigma_x}{dX}\right)$$

$$\frac{dq}{dX} = \frac{1}{2}\left(\frac{2\sigma_x\frac{d\sigma_x}{dX} - \sigma_y\frac{d\sigma_x}{dX}}{q}\right)$$

que era lo que se quería demostrar.

<u>Zona más solicitada</u>: es aquella en la que q es máxima, lo que ocurre cuando $\frac{dq}{dX} = 0$.

Como $q > 0 \quad \forall\, k > 0$, se tiene que:

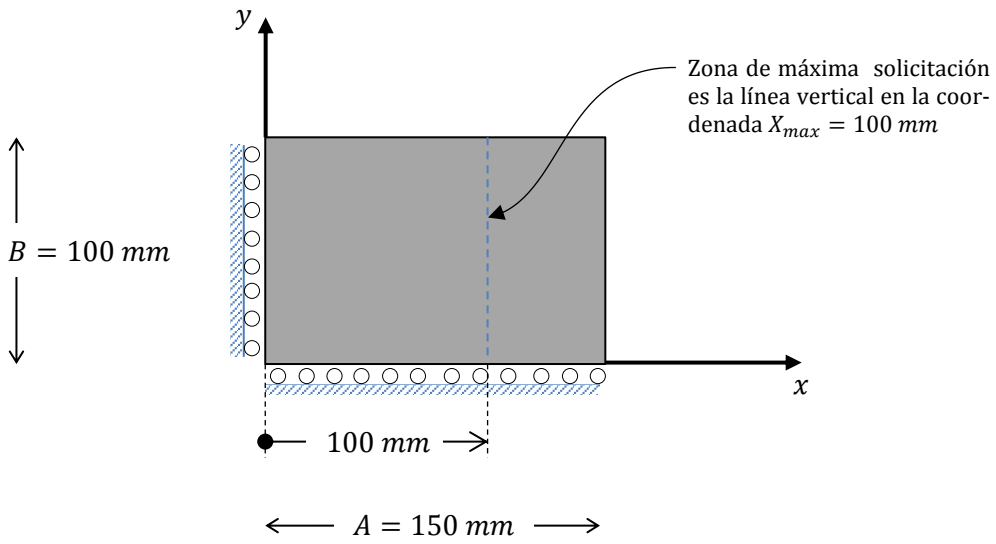
$$\frac{dq}{dX} = \frac{1}{2}\left(\frac{2\sigma_x\frac{d\sigma_x}{dX} - \sigma_y\frac{d\sigma_x}{dX}}{q}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\sigma_x\frac{d\sigma_x}{dX} - \sigma_y\frac{d\sigma_x}{dX} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (2\sigma_x - \sigma_y)\frac{d\sigma_x}{dX} = 0$$

El enunciado declara que $2\sigma_x - \sigma_y \neq 0$ por lo que la expresión anterior se anula cuando:

$$\frac{d\sigma_x}{dX} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\sigma_x}{dX} = k\left\{\frac{2a}{A}\left(\frac{X}{A}\right) - \frac{2b}{A}\left(\frac{A-X}{A}\right)\right\} = 0$$

Despejando X, se obtiene: $X_{max} = \frac{b}{a+b}A = 100\ mm$



PARTE 3:

En la zona de máxima solicitación $X_{max} = 100\ mm$ se tiene:

$$\sigma_x = \sigma_x(100) = k\left\{-20\left(\frac{100}{150}\right)^2 - 40\left(\frac{150-100}{150}\right)^2 + 60\right\} = 41{,}11[MPa]\cdot k$$

$$\sigma_y = 20[MPa]\cdot k$$

Sustituyendo en la expresión anterior para q:

$$q = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2} = 35{,}61[MPa]\cdot k$$

Comparando con el límite elástico inicial, se obtiene:

$$k = k^* \quad \Rightarrow \quad q = 35{,}61[MPa]\cdot k^* = \sigma_{Y0} = 300[MPa]$$

$$\Rightarrow \quad k^* = 8{,}42$$

PARTE 4:

En el instante de plastificación inicial aún es válida la Ley de Hooke-Lamé. En la dirección z (que es perpendicular al plano de la placa), se tiene:

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} - \frac{\upsilon}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = 0 - \frac{\upsilon}{E}(41{,}11 + 20)k^* = -0{,}002058 = \frac{\Delta e}{e_0} = \frac{\Delta e}{5\ mm}$$

De donde:

$$\Delta e = -5\cdot 0{,}002058 = -0{,}01\ mm \quad \Rightarrow \quad e_1 = e_0 + \Delta e = 4{,}99\ mm$$

PARTE 5:

Se observa que NO hay restricciones de movimiento que obliguen a utilizar la ecuación constitutiva para calcular alguna de las componentes del tensor de tensiones: es decir, todas las componentes σ_{ij} son datos del problema.

Además, claramente el tensor de tensiones puede factorizarse del siguiente modo:

$$\sigma_{ij} = k\,\overline{\sigma}_{ij} \quad \text{donde:} \quad * \ \overline{\sigma}_{ij} \text{ depende de la posición, pero no de "}k\text{".}$$
$$* \ k \quad \underline{\text{no}} \text{ depende de la posición.}$$

Por lo tanto, la solicitación mecánica es de tipo <u>carga proporcional</u> y puede, por tanto, usarse la <u>Teoría Total</u> de la plasticidad.

$$k = 1{,}05\,k^* \quad \Rightarrow \quad q = 1{,}05\,\sigma_{Y0} = 315\ MPa \quad \text{(pues hay carga proporcional)}$$

De la ley de endurecimiento, se tiene:

$$q = 315 = \sigma_Y = H\left(\overline{\varepsilon}^p\right) = 300 + 75\,\overline{\varepsilon}^p \qquad \Rightarrow \qquad \overline{\varepsilon}^p = \frac{15}{75} = 0{,}2 = H^{-1}(315)$$

Además:

$$k = 1{,}05\,k^* \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_x = 1{,}05 \cdot 41{,}11[MPa] \cdot k^* = 363{,}6\ MPa \\ \sigma_y = 1{,}05 \cdot 20[MPa] \cdot k^* = 176{,}9\ MPa \\ p \ = -180{,}2\ MPa \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad s_{ij} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2\sigma_x - \sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_x + 2\sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_x - \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 183{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & -3{,}2 & 0 \\ 0 & 0 & -180{,}2 \end{bmatrix} MPa$$

Teoría Total:

$$\varepsilon_{zz} = \frac{-p}{3K} + \left\{\frac{1}{2G} + \frac{3}{2}\frac{\overline{\varepsilon}^p}{q}\right\} s_{zz}$$

Reemplazando los valores $G = \frac{E}{2(1+\upsilon)} = 28846\ MPa$ y $K = \frac{E}{3(1-2\upsilon)} = 62500\ MPa$ se obtiene:

$$\varepsilon_{zz} = \frac{180{,}2\ MPa}{3 \cdot 62500\ MPa} + \left\{\frac{1}{2 \cdot 28846\ MPa} + \frac{3}{2} \cdot \frac{0{,}2}{315\ MPa}\right\} \cdot (-180{,}2\ MPa)$$

$$\varepsilon_{zz} = -0{,}174 = \frac{\Delta e}{e_0} = \frac{\Delta e}{5\ mm}$$

De donde, finalmente:

$$\Delta e = -5 \cdot 0{,}174 = -0{,}87\ mm \quad \Rightarrow \quad e_2 = e_0 + \Delta e = 4{,}13\ mm$$

Ejercicio 4.3

_a_) Ecuación diferencial del modelo

Relaciones cinemáticas:

$$\varepsilon = \varepsilon_A + \varepsilon_B \tag{1}$$

$$\varepsilon_A = \varepsilon_{A.E} = \varepsilon_{A.C} \tag{2}$$

$$\varepsilon_B = \varepsilon_{B.E} = \varepsilon_{B.C} \tag{3}$$

Ecuaciones de equilibrio:

$$\sigma = \sigma_A = \sigma_B \tag{4}$$

$$\sigma_A = \sigma = \sigma_{A.E} + \sigma_{A.C} \tag{5}$$

$$\sigma_B = \sigma = \sigma_{B.E} + \sigma_{B.C} \tag{6}$$

Relaciones constitutivas de cada elemento analógico:

$$\sigma_{A.E} = E_A \varepsilon_A \tag{7}$$

$$\sigma_{A.C} = C_A \dot{\varepsilon}_A \tag{8}$$

$$\sigma_{B.E} = E_B \varepsilon_B \tag{9}$$

$$\sigma_{B.C} = C_B \dot{\varepsilon}_B \tag{10}$$

De (5), (7) y (8) se tiene:

$$\sigma = E_A \varepsilon_A + C_A \dot{\varepsilon}_A \qquad / \ \mathcal{L}[\ \ ]$$

$$\bar{\sigma} = E_A \bar{\varepsilon}_A + s C_A \bar{\varepsilon}_A$$

$$\bar{\varepsilon}_A = \frac{1}{E_A + s C_A} \bar{\sigma} \tag{11}$$

De (6), (9) y (10) se tiene:

$$\sigma = E_B \varepsilon_B + C_B \dot{\varepsilon}_B \qquad / \ \mathcal{L}[\ \ ]$$

$$\bar{\sigma} = E_B \bar{\varepsilon}_B + s C_B \bar{\varepsilon}_B$$

$$\bar{\varepsilon}_B = \frac{1}{E_B + s C_B} \bar{\sigma} \tag{12}$$

Sumando (11) + (12) y teniendo en cuenta (1), se obtiene:

$$\bar{\varepsilon} = \left\{ \frac{1}{E_A + s C_A} + \frac{1}{E_B + s C_B} \right\} \bar{\sigma} = \frac{a_0 + s a_1}{b_0 + s b_1 + s^2 b_2} \bar{\sigma} \tag{13}$$

Donde: $a_0 = E_A + E_B$ $a_1 = C_A + C_B$

$b_0 = E_A E_B$ $b_1 = E_A C_B + E_B C_A$ $b_2 = C_A C_B$

Ordenando términos en (13) y tomando anti-transformada, se obtiene la ecuación diferencial del modelo, en la expresión (15):

$$[b_0 + sb_1 + s^2 b_2]\,\overline{\varepsilon} = [a_0 + sa_1]\,\overline{\sigma} \quad \Leftrightarrow \quad Q(s)\,\overline{\varepsilon} = P(s)\,\overline{\sigma} \qquad / \ \mathcal{L}^{-1}[\ \ ] \tag{14}$$

$$b_0\varepsilon + b_1\dot{\varepsilon} + b_2\ddot{\varepsilon} = a_0\sigma + a_1\dot{\sigma} \tag{15}$$

***b*.1) <u>FUNCIÓN DE FLUENCIA:</u>**

Se obtiene asumiendo tensión constante (y de valor unitario) para $\boldsymbol{t} > 0$. Es decir

$$\sigma(t) = 1 = H(t) \quad \forall t \geq 0$$

De acuerdo a lo expresado en el apartado de "Modelos Viscoelásticos Generalizados", se tiene que:

$$\bar{J}(s) = \frac{\overline{P}(s)}{\overline{Q}(s)}\frac{1}{s} \ \Rightarrow \ J(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\ \bar{J}(s)\ \right] \tag{16}$$

En nuestro caso, de (14) se observa que:

$$\bar{J}(s) = \frac{a_0 + sa_1}{s[b_0 + sb_1 + s^2 b_2]} \tag{17}$$

Recordando (13), es posible separar (17) en fracciones parciales, obteniendo así (18):

$$\bar{J}(s) = \frac{1}{s[E_A + sC_A]} + \frac{1}{s[E_B + sC_B]}$$

$$\bar{J}(s) = \frac{1}{s\left[\frac{E_A}{C_A} + s\right]}\frac{1}{C_A} + \frac{1}{s\left[\frac{E_B}{C_B} + s\right]}\frac{1}{C_B} = \bar{J}_1(s) + \bar{J}_2(s) \tag{18}$$

Es evidente que $J(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\ \bar{J}(s)\ \right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\ \bar{J}_1(s) + \bar{J}_2(s)\ \right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\ \bar{J}_1(s)\ \right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\ \bar{J}_2(s)\ \right]$

Así, recurriendo a la tabla de anti-transformadas y ordenando términos, se obtiene $J(t)$ como:

$$J(t) = J_1(t) + J_2(t) = \frac{1}{E_A}\left\{1 - exp\left(-\frac{E_A}{C_A}t\right)\right\} + \frac{1}{E_B}\left\{1 - exp\left(-\frac{E_B}{C_B}t\right)\right\} \tag{19}$$

Es claro que $J(t)$ dada por (19) consiste en la suma de dos "***crecimientos exponenciales***", cuyas velocidades de crecimiento están gobernadas por E_A/C_A y E_B/C_B , respectivamente.

***b*.2) <u>MÓDULO DE RELAJACIÓN</u>:**

De la teoría de Modelos Viscoelásticos Generalizados, se tiene: $\overline{Y}(s) = \frac{1}{s^2\,\overline{J}(s)}$

Recordando (17) y ordenando términos, resulta que:

$$\overline{Y}(s) = \frac{b_0 + sb_1 + s^2 b_2}{s[a_0 + sa_1]} = \frac{1}{s\left[\frac{a_0}{a_1} + s\right]}\frac{b_0}{a_1} + \frac{1}{\left[\frac{a_0}{a_1} + s\right]}\frac{b_1}{a_1} + \frac{s}{\left[\frac{a_0}{a_1} + s\right]}\frac{b_2}{a_1} \tag{20}$$

$$\overline{Y}(s) = \quad \overline{Y}_1(s) \quad + \quad \overline{Y}_2(s) \quad + \quad \overline{Y}_3(s)$$

Las transformadas inversas de $\overline{Y}_1$ e $\overline{Y}_2$ se obtienen directamente de tablas (ver apuntes). La transformada inversa de $\overline{Y}_3$, en cambio, hay que desarrollarla un poco más:

$$\overline{Y}_3 = \frac{s}{\left[\frac{a_0}{a_1} + s\right]}\frac{b_2}{a_1} = \left\{\frac{\frac{a_0}{a_1} + s}{\left[\frac{a_0}{a_1} + s\right]} - \frac{\frac{a_0}{a_1}}{\left[\frac{a_0}{a_1} + s\right]}\right\}\frac{b_2}{a_1} = \left\{1 - \frac{1}{\left[\frac{a_0}{a_1} + s\right]}\frac{a_0}{a_1}\right\}\frac{b_2}{a_1}$$

Con lo cual,

$$Y_3(t) = \left\{\delta(t) - \frac{a_0}{a_1}exp\left(-\frac{a_0}{a_1}t\right)\right\}\frac{b_2}{a_1} \tag{21}$$

Combinando (21) con las transformadas inversas de $\overline{Y}_1$ e $\overline{Y}_2$ obtenidas de la tabla del apartado 3.9 y ordenando términos, se obtiene:

$$Y(t) = \frac{b_0}{a_0}\left\{1 - exp\left(-\frac{a_0}{a_1}t\right)\right\} + \frac{b_1}{a_1}exp\left(-\frac{a_0}{a_1}t\right) + \frac{b_2}{a_1}\left\{\delta(t) - \frac{a_0}{a_1}exp\left(-\frac{a_0}{a_1}t\right)\right\}$$

$$\boxed{Y(t) = \frac{b_0}{a_0} + \frac{b_2}{a_1}\delta(t) - \left\{\frac{b_0}{a_0} - \frac{b_1}{a_1} + \frac{a_0 b_2}{a_1^2}\right\}exp\left(-\frac{a_0}{a_1}t\right)} \tag{22}$$

La función $Y(t)$ puede ser un crecimiento o decrecimiento exponencial, dependiendo del signo del coeficiente de la función exponencial. Este signo, a su vez, depende de los valores numéricos que adopten los parámetros constitutivos del problema $\boldsymbol{E_A}$, $\boldsymbol{E_B}$, $\boldsymbol{C_A}$ y $\boldsymbol{C_B}$.

En resumen, de los apartados (*b*.1) y (*b*.2), se tiene:

$$\boxed{J(t) = \frac{1}{E_A}\left\{1 - exp\left(-\frac{E_A}{C_A}t\right)\right\} + \frac{1}{E_B}\left\{1 - exp\left(-\frac{E_B}{C_B}t\right)\right\}} \tag{23}$$

$$\boxed{Y(t) = \frac{b_0}{a_0} + \frac{b_2}{a_1}\delta(t) - \left\{\frac{b_0}{a_0} - \frac{b_1}{a_1} + \frac{a_0 b_2}{a_1^2}\right\}exp\left(-\frac{a_0}{a_1}t\right)} \tag{24}$$

Donde $\boldsymbol{a}_0$, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}_0$, $\boldsymbol{b}_1$ y $\boldsymbol{b_2}$ dependen directamente de los parámetros constitutivos de los elementos analógicos, $\boldsymbol{E_A}$, $\boldsymbol{E_B}$ y $\boldsymbol{C_A}$, $\boldsymbol{C_B}$, que son datos del problema.

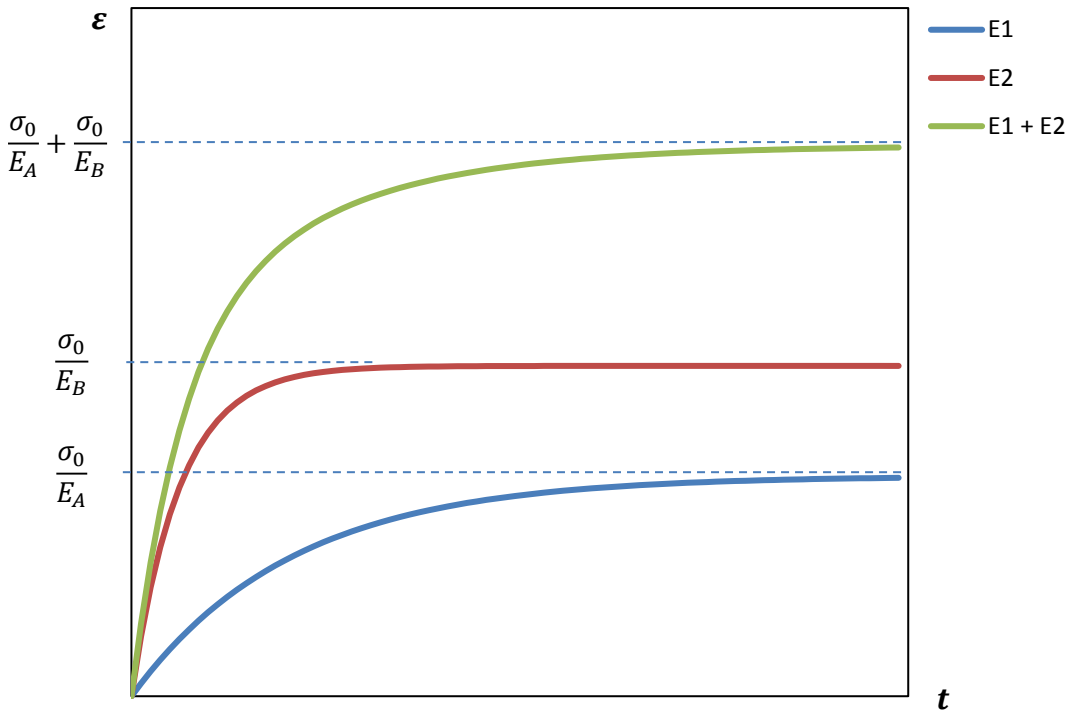
c) Evolución de ε entre 0 < t < t_1 cuando σ = σ_0 = cte

La respuesta en deformaciones a una solicitación en tensión constante es:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0\, J(t) = \frac{\sigma_0}{E_A}\left[1 - exp\left(-\frac{E_A}{C_A}t\right)\right] + \frac{\sigma_0}{E_B}\left[1 - exp\left(-\frac{E_B}{C_B}t\right)\right] = \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t)$$

$\varepsilon_1(t)$ y $\varepsilon_2(t)$ representan, cada una, un "crecimiento exponencial" desde "0" en t=0 hasta la aproximarse asintóticamente a la solución que mostraría un material elástico clásico.

Se recuerda que esto también ocurría en un modelo básico formado por un único elemento tipo Kelvin (ver apuntes).



De la figura anterior, es evidente que la "***respuesta en deformaciones***" a una solicitación mecánica consistente en una "***tensión prescrita de valor constante***" tiende, para tiempos muy largos ($t \to +\infty$), a la solución que mostraría la Elasticidad Clásica si el material elástico fuese un "*compuesto*" formado por dos "***materiales elásticos*** dispuestos ***en serie***", cada uno con módulo E_A y E_B, respectivamente. De hecho, la "rigidez equivalente" $\boldsymbol{E_{eq}}$, de dos materiales elásticos "***en serie***" se obtiene de:

$$\frac{1}{E_{eq}} = \frac{1}{E_A} + \frac{1}{E_B}$$

En este problema, en el que hay ***dos*** elementos tipo Kelvin dispuestos "***en serie***", se preserva esta característica que poseen los elementos unitarios de tipo Kelvin, consistente en la convergencia asintótica en el tiempo hacia la solución puramente elástica.

d) Evolución de σ después de que ε ha alcanzado el valor $\varepsilon_1 = \varepsilon(t_1)$, es decir, para t ≥ t_1 :

Si $\varepsilon_1 = \varepsilon(t_1)$, entonces $\sigma(t) = \varepsilon_1 Y(t - t_1)$ para $t > t_1$, donde:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon(t_1) = \lim_{t \to t_1^-}\left(\sigma_0\, J(t)\right) = \sigma_0\left[\frac{1}{E_A} + \frac{1}{E_B} - \left\{\frac{1}{E_A}exp\left(-\frac{E_A}{C_A}t_1\right) + \frac{1}{E_B}exp\left(-\frac{E_B}{C_B}t_1\right)\right\}\right]$$

Así, la evolución de $\sigma(t)$ se obtiene como:

$$\sigma(t) = \varepsilon_1 Y(t-t_1) = \varepsilon_1 \left[\frac{b_0}{a_0} + \frac{b_2}{a_1}\delta(t-t_1) - \left\{ \frac{b_0}{a_0} - \frac{b_1}{a_1} + \frac{a_0 b_2}{a_1^2} \right\} exp\left(-\frac{a_0}{a_1}[t-t_1] \right) \right]$$

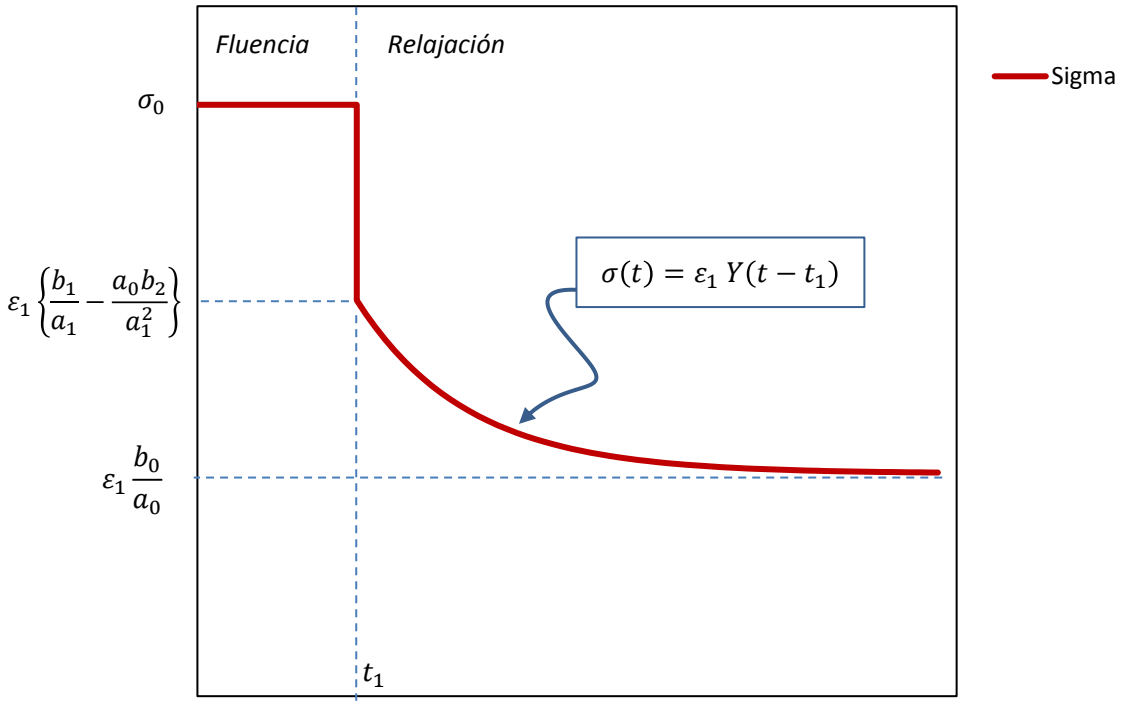
La tensión sufre un ***decaimiento exponencial y asintótico*** hacia $\varepsilon_1 \frac{b_0}{a_0}$ para $t \to +\infty$.

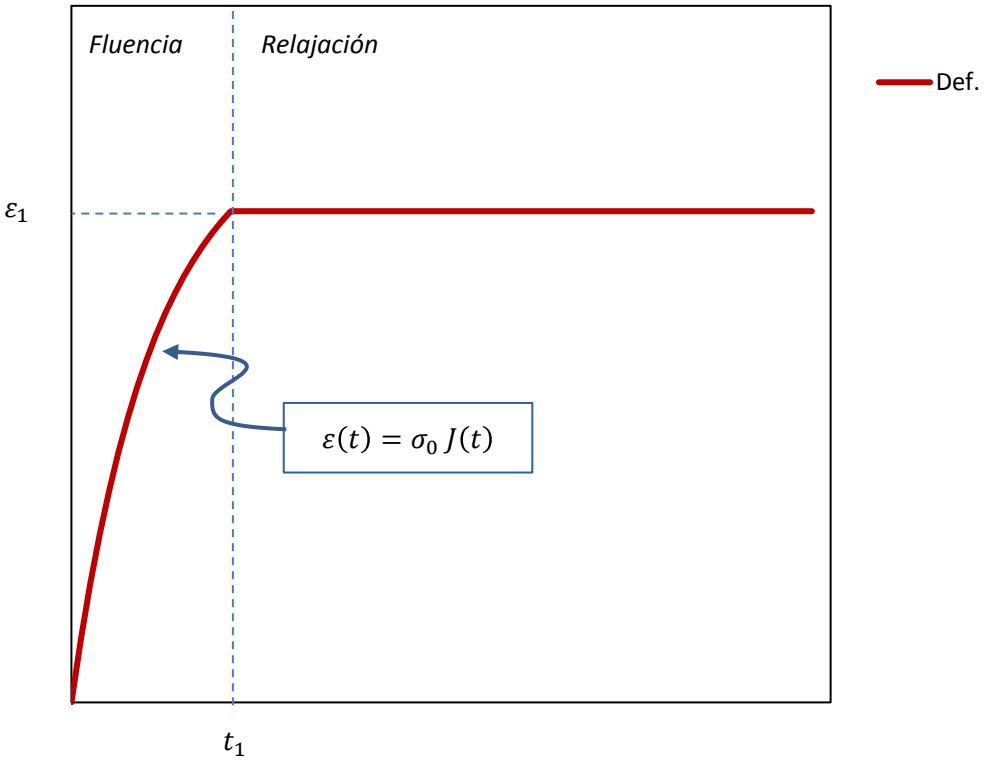
Por otra parte, en el instante $\boldsymbol{t = t_1^+}$, es decir, infinitesimalmente ***después*** de la transición desde la situación de tensión constante a la situación de deformación constante, se tiene:

$$\sigma(t_1) = \lim_{t \to t_1^+} \left(\varepsilon_1 Y(t-t_1) \right) = \varepsilon_1 \left[\frac{b_1}{a_1} - \frac{a_0 b_2}{a_1^2} \right] \neq \sigma_0$$

Es decir, en el instante de transición, la tensión sufre una ***discontinuidad*** con respecto al valor que tenía antes de t=t_1, que era σ_0.

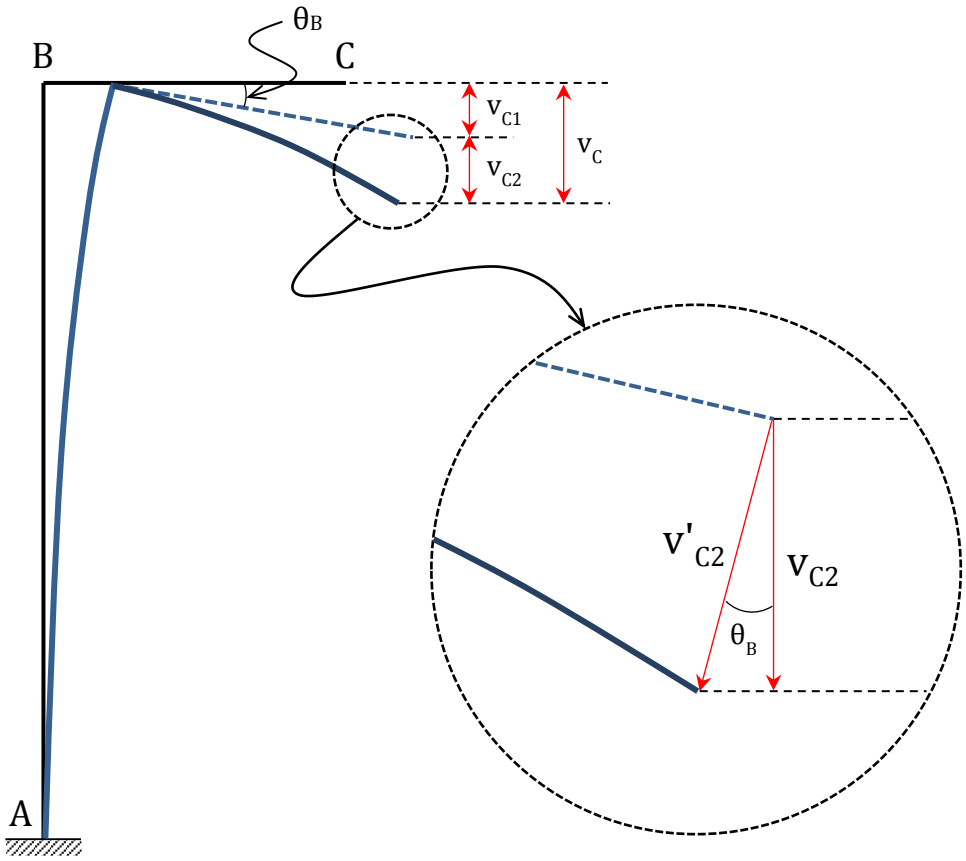
La figura siguiente muestra los dos procesos consecutivos de ***fluencia*** para $0 < t < t_1$, y de ***relajación*** para $t > t_1$




Fluencia
Relajación
Def.
ε_1
$\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t)$
t_1

Ejercicio 4.6

En primer lugar, debemos calcular la expresión que define el desplazamiento vertical del punto C, v_C, como si se tratara de un material elástico y lineal:



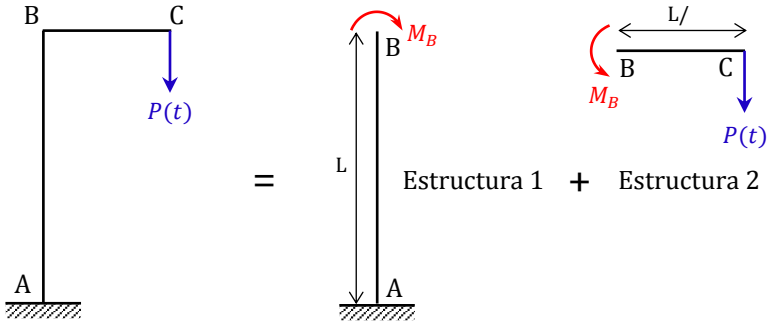
De la figura anterior, podemos definir v_C como:

$$v_C = v_{C1} + v_{C2}$$

v_{C1} : es un desplazamiento debido al giro en B causado por la flexión del elemento AB, sin tener en cuenta la flexión del elemento BC

v_{C2} : es un desplazamiento debido a la flexión de BC, sin tener en cuenta la flexión de AB

Los desplazamientos v_{C1} y v_{C2} se obtienen a partir de las expresiones de Resistencia de Materiales proporcionadas en el enunciado. Para poder hacer uso de dichas expresiones, es necesario dividir previamente la estructura en dos nuevas estructuras más simples, de la siguiente manera:



De la estructura 1:

$$v_{C1} = \theta_B \frac{L}{4} = \left(\frac{M_B L}{EI}\right)\frac{L}{4}$$

De la estructura 2:

$$v'_{C2} = \frac{P(t)\cdot (L/4)^3}{3\cdot E\cdot I} = \frac{P(t)\cdot L^3}{192\cdot E\cdot I} \;\rightarrow\; v_{C2} = v'_{C2}\cdot \cos\theta_B \cong v'_{C2} \;\; (\theta_B \ll 1)$$

Además, planteando el equilibrio en la estructura 2 se tiene que: $M_B = P(t)\cdot \frac{L}{4}$, por lo que finalmente se puede escribir la expresión que proporciona el desplazamiento vertical del punto C, para un material elástico, como:

$$v_C = v_{C1} + v_{C2} = \frac{13\cdot P(t)\cdot L^3}{192\cdot E\cdot I}$$

Para poder aplicar la expresión anterior a materiales viscoelásticos, es necesario utilizar el Principio de Correspondencia: *E se sustituye por* $1/J(t)$, por lo que:

$$v_C(t) = \frac{13P(t)L^3}{192\, I} J(t)$$

donde la función de Fluencia $J(t)$, al tratarse de un material viscoelástico que sigue un comportamiento de tipo Maxwell, viene dada por:

$$J(t) = \frac{1}{E} + \frac{1}{c}t$$

siendo E y c las constantes que definen al muelle y al amortiguador del modelo Maxwell respectivamente.

Debido a que la carga $P(t)$ varía con el tiempo, es necesario hacer uso del concepto de Integral Hereditaria:

$$\varepsilon(t) = \sigma(0)\cdot J(t) + \int_0^t \frac{d\sigma(t')}{dt'}\cdot J(t-t')dt'$$

Que, particularizado para este problema, se puede escribir como:

$$v_C(t) = \frac{13P(0)L^3}{192\, I} J(t) + \int_0^t \frac{13L^3}{192\, I}\,\frac{dP(t')}{dt'} J(t-t')dt'$$

donde:

$$P(0) = P_0 \;\; ; \;\; \frac{dP(t')}{dt'} = m$$

Así, se puede escribir la evolución temporal del desplazamiento vertical del punto C como:

$$v_C(t) = \frac{13L^3}{192\, I}\left\{ P_0\left(\frac{1}{E} + \frac{1}{c}t\right) + m\left(\frac{1}{E}t + \frac{t^2}{2c}\right)\right\}$$